猪俣哲史・桑森啓編
『2005 年国際産業連関表の作成と利用』
アジア国際産業連関シリーズ No.75　アジア経済研究所　2010 年

第 6 章
取引額行列の推計における RAS 法の特徴

野田容助

要約：

取引額表においてすべての要素は知られておらず、行および列の合計がベクトルとして既知であるとき、適当な行列を初期値にすることにより取引額の要素を推計することができる。比例反復法あるいは RAS 法は、繰り返し計算によって解を求めるそのような推計方法である。本章は正数を要素とする行列 $X^{(0)}$ に対して任意の正数を要素とするベクトル a と b、$D(a)$ を a を要素とする対角行列とするとき、初期値を $X^{(0)}$ と $X_1^{(0)} = D(a)X^{(0)}D(b)$ とした RAS 法による解は一致することを示す。RAS 法の解はその初期値において $D(a)$ と $D(b)$ に対して無関係である。

キーワード：

RAS 法、取引額表の推計

はじめに

正数を要素として持つ任意の $m \times n$ 行列を k を正の整数に対して $X^{(k)}$ として、$X^{(0)}$ についてはその要素は知られているが、k が自然数のときは $X^{(k)}$ の要素の値は知られていないとする。すべての要素が 1 からなる m 次元のベク

トルをl_m、すべての要素が 0 からなる m 次元のベクトルをo_m、m 次元の単位行列をI_m、ベクトル x が与えられたときその要素を対角要素として非対角要素をすべて 0 とする対角行列を $D(x)$ とする。任意の正数から構成される m 次元のベクトルを$r=(r_1 \cdots r_m)'$ n 次元のベクトルを$s'=(s_1 \cdots s_n)$ として、r と s の要素の和はともに g とする。初期値となる $m\times n$ 行列$X^{(0)}$を基礎として後述する（1-1）式と（1-2）式を 1 組として繰り返し計算を行うとき、k を限りなく大きくすれば行列$X^{(k)}$における行の和が$X^{(k)}l_n=r=(r_1 \cdots r_m)'$、列の和が$l_m'X^{(k)}=s'=(s_1 \cdots s_n)$、すべての要素の和が$l_m'X^{(k)}l_n=s'l_m \quad =r'l_n=g$となるように行列$X^{(k)}$のすべての要素を推計することができる。一般的に利用されている推計方法として最小 2 乗法により連立方程式で解を求める方法と繰り返し計算により収束解を求める RAS 法あるいは比例反復法がある。

本章では負ではない実数を要素とする任意の行列$X^{(0)}$に対して任意の正数を要素とするベクトル a と b、$D(a)$ を a を対角要素とする対角行列とするとき、$X^{(0)}$ と $X_1^{(0)}=D(a)X^{(0)}D(b)$ を初期値とした RAS 法により収束したそれぞれの解は一致することを示す。RAS 法の解はその初期値において$D(a)$と $D(b)$ に対して無関係である。本章は RAS 法による取引額の推計、RAS 法における推計方法の特徴、推計方法の具体例から構成されている。

1. RAS 法による取引額表の推計

初期値の$X^{(0)}$についてはその要素は知られているが、k が自然数のときは$X^{(k)}$の値は知られていないとする。繰り返し法により$X^{(k)}$の解を求める方法が RAS 法である。RAS 法は繰り返し計算が奇数回目のときは、

(1-1) $$X^{(2k-1)}=X^{(2k-2)}D(l_m'X^{(2k-2)})^{-1}D(s)$$

となる漸化式で表わされる。k は自然数である。（1-1）式に基づいた繰り返し計算が偶数回目のときの漸化式は、

(1-2) $$X^{(2k)}=D(r)D(X^{(2k-1)}l_n)^{-1}X^{(2k-1)}$$

として、この（1-1）式および（1-2）式を 1 組として繰り返し計算をすることで行われる。この繰り返しにより $X^{(k)}$ は k を限りなく大きくすれば、$X^{(k)} \to X$ となり、X に一意的に収束することが知られている。求めたい行列 X は初期値を $X^{(0)}$ として RAS 法の繰り返し計算において作成するが、得られた行列の列の和が s' であり、同時に行の和が r でとなったときに収束したとする。収束したときの $X^{(k)}$ を X とする。

繰り返しが $2k-1$ 回目の（1-1）式について行の和を取れば、すなわち、繰り返しが奇数回目のときは、

(1-3) $$l_m' X^{(2k-1)} = l_m' X^{(2k-2)} D(l_m' X^{(2k-2)})^{-1} D(s) = l_m' D(s) = s'$$

である。しかし、k が小さいときには $X^{(2k-1)} l_n = r$ は必ずしも成り立つとは限らない。同じく、（1-2）式について列の和を取れば、すなわち、繰り返しが偶数回目のときは、

(1-4) $$X^{(2k)} l_n = D(r) D(X^{(2k-1)} l_n)^{-1} X^{(2k-1)} l_n) = D(r) l_n = r$$

となる。しかし、k が小さいときには $l_m' X^{(2k)} = s'$ は必ずしも成り立つとは限らない。さらに、繰り返しが奇数回目のときの要素のすべての総和は、

$$\begin{aligned} l_m' X^{(2k-1)} l_n &= l_m' D(r) D(X^{(2k-2)} l_n)^{-1} X^{(2k-2)} l_n = l_m' D(r) l_n \\ &= l_m' r = g \end{aligned}$$

であり、同じようにして、偶数回目のときも $l_m' X^{(2k)} l_n = g$ である。（1-1）式を（1-2）式に代入すると、偶数回目の繰り返しにより得られた $X^{(2k)}$ は、

$$X^{(2k)} = D(r) D(X^{(2k-1)} l_n)^{-1} X^{(2k-2)} D(l_m' X^{(2k-2)})^{-1} D(s)$$

となり、これを繰り返すと、

$$\begin{aligned} X^{(2k)} &= D(r)^k \{ D(X^{(2k-1)} l_n) \cdots D(X^{(1)} l_n) \}^{-1} X^{(0)} \\ &\{ D(l_m' X^{(0)}) \cdots D(l_m' X^{(2k-2)}) \}^{-1} D(s)^k \end{aligned}$$

となる。この式における右辺の $X^{(0)}$ の前の項目を対角行列 $R(k)$として、

(1-5) $$R(k) = D(r)^k \{ D(X^{(2k-1)} l_n) \cdots D(X^{(1)} l_n) \}^{-1}$$

とおき、後の項目を対角行列 $S(k)$として、

(1-6) $$S(k) = \{ D(l_m' X^{(0)}) \cdots D(l_m' X^{(2k-2)}) \}^{-1} D(s)^k$$

とおけば、（1-2）式は、

(1-7)　　$X^{(2k)} = R(k)X^{(0)}S(k)$

と表される。この行列は繰り返しが偶数回目のときにのみ得られることに注意する必要がある。また、(1-6) 式は$S(k) = S(k-1)D(l_m' X^{(2k-2)})^{-1} D(s)$となるので、繰り返しが奇数回目のときは (1-1) 式と (1-7) 式から、

(1-8)
$$X^{(2k-1)} = R(k-1)X^{(0)}S(k-1)D(l_m' X^{(2k-2)})^{-1} D(s)$$
$$= R(k-1)X^{(0)}S(k)$$

となる。

スカラーで表わされた数列の$s'\{\log S(k)\}l_n$および$r'\{\log R(k)\}l_m$についてはkに関して単調増加数列でしかも上に有界であり、両数列は収束することが廣津［1982］により示されている。前者の数列は正の実数を対角要素とする対角行列であるので、(1-6) 式から、

(1-9)
$$s'\{\log S(k)\}l_n = s'\{\log D(s)^k - \sum_{t=0}^{k} \log D(l_m' X^{(2t-2)})\}l_n$$
$$= \sum_{t=1}^{k} s'\{\log D(s) - \log D(l_m' X^{(2t-2)})\}l_n$$

となる。また、一般に、正数を要素とする n 次元ベクトル s,b に対して、$s'l_n = b'l_n$を条件としたときの$s'\log b$の最大化は$s = b$のときに得られるため、$s'\log s - s'\log b \geq 0$である。(1-9) 式における最後の式の｛ ｝の中を$t = 1\cdots k$に対して、

(1-10)　　$\xi_s^{(2t-2)} = s'\log s - s'\log(l_m' X^{(2t-2)})'$

とおく。$s'l_n = g$であり、$(l_m' X^{(2k-2)})'l_n = g$なので、$\xi_s^{(2t-2)} \geq 0$ であり、(1-9) 式は、

(1-11)　　$s'\{\log S(k)\}l_n = \sum_{t=1}^{k} \xi_s^{(2t-2)} \geq 0$

と表わされる。(1-9) 式において最後の式は$\log\{D(s)D(l_m' X^{(2t-2)})^{-1}\}$となるので、この log の中の｛ ｝を、

(1-12)　　$D(\varsigma_s^{(2t-2)}) = D(s)D(l_m' X^{(2t-2)})^{-1}$

とおく。(1-12) 式を (1-10) 式へ代入すれば、

(1-13)　$\xi_s^{(2t-2)} = s'\{\log D(\varsigma_s^{(2t-2)})\}l_n$

となる。（1-12）式から $D(l_m' X^{(2t-2)}) = D(s)D(\varsigma_s^{(2t-2)})^{-1}$ となり、この式の両辺に左から l_m' を乗じることにより、繰り返しが偶数回目の $X^{(2k-2)}$ における列の和は、

(1-14)　$l_m' X^{(2t-2)} = s' D(\varsigma_s^{(2t-2)})^{-1}$

と表わすことができる。（1-11）式の数列は収束するので、t を限りなく大きくすれば、$\xi_s^{(2t-2)} \to 0$ となり、（1-13）式において任意の s に対して、$s'\{\log D(\varsigma_s^{(2t-2)})\}l_n \to 0$ が成り立つ。したがって、$\{\log D(\varsigma_s^{(2t-2)})\}l_n \to o_n$ となり、$D(\varsigma_s^{(2t-2)})\} \to I_n$ となる。t を k と置き換えればこのことから（1-14）式は $l_m' X^{(2k-2)} \to s'$ となる。（1-4）式において繰り返しが偶数回目のときは $X^{(2k-2)} l_n = r$ なので $X^{(2k-2)}$ は収束する。

繰り返しが奇数回目のときは、$\xi_r^{(2t-1)} = r'\log r - r'\{\log D(X^{(2t-1)} l_n)\}l_n$ とおけば、

(1-15)　$r'\{\log R(k)\}l_n = \sum_{t=1}^{k} \xi_r^{(2t-1)} \geq 0$

である。$D(\varsigma_s^{(2t-1)}) = D(X^{(2t-1)} l_n)^{-1} D(r)$ とすれば、$X^{(2k-2)}$ における行の和は、

(1-16)　$X^{(2k-1)} l_n = D(\varsigma_s^{(2t-1)})^{-1} r$

と表わされる。(1-15) 式の数列は収束するので、k を限りなく大きくすれば、$\xi_r^{(2k-1)} \to 0$ であるから、$D(\varsigma_s^{(2t-1)})^{-1} \to I_n$ となり、(1-16) 式は $X^{(2k-1)} l_n \to r$ となる。（1-3）式において繰り返しが奇数回目のときは $l_m' X^{(2k-1)} = s'$ なので $X^{(2k-1)}$ は収束する。

最後に $X^{(k)}$ の解の一意性を示すために、k について適当な部分列として $\{u\}$ と $\{v\}$ が存在して、k を限りなく大きくすれば、u と v も限りなく大きくなり、$X^{(u)} \to X_1$, $X^{(v)} \to X_2$ が成り立つとする。X_1 と X_2 において列の和は $l_m' X_1 = l_m' X_2 = s'$ であり、同時に行の和も $X_1 l_n = X_2 l_n = r$ を満足する。限りなく大きな v に対して、$X^{(v)} \to X_2$、を考える。v の $2t$ に対して、すなわち、偶数の数列 $X^{(2t)}$ については（1-8）式の対数をとれば、

(1-17)　$\log X^{(2t)} = \log R(k) l_m l_n' + \log X^{(0)} + l_m l_n' \log S(k)$

となるが、この式において 0 の対数は 0 とする。また（1-11）式と（1-15）式から、

$$(1\text{-}18) \qquad l_n'\{X_1'\log X^{(2t)}X_1'\}l_m = r'\log X^{(0)}s + g\sum_{t=1}^{k}(\xi_r^{(2t-1)}+\xi_s^{(2t-2)})$$

となる。同じようにして 2t-1 に対しても、すなわち、奇数の数列 $X^{(2t-1)}$ についても、$l_n'\{X_1'\log X^{(2t-1)}X_1'\}l_n$ は（1-18）式の右辺に等しい。したがって、v については偶数と奇数にかかわらず（1-18）式の右辺に等しいので、

$$(1\text{-}19) \qquad X_1'\log X^{(v)}X_1' \to X_1'(\log X_2)X_1'$$

となる。u についても偶数と奇数にかかわらず $X_1'(\log X^{(u)})X_1'$ は（1-18）式の右辺に一致し、

$$(1\text{-}20) \qquad X_1'\log X^{(u)}X_1' \to X_1'(\log X_1)X_1$$

が得られる。(1-19) 式から (1-20) 式を引いた結果 $X_1'(\log X_1 - \log X_2)X_1 = O$ より、$X_1 = X_2$ となる。したがって、$X^{(k)} \to X$ となる解は一意的に求められる。

結果として限りなく大きい k に対して、繰り返し回数が奇数回目と偶数回目にかかわらず行列 $X^{(k)}$ は列の和は $l_m'X^{(k)} \to s'$ であり、同時に行の和は $X^{(k)}l_n \to r$ となり収束することが示される。繰り返しになるが、初期値を $X^{(0)}$ とすれば RAS 法の繰り返し計算による取引額表の解は一意に決定される。

2. RAS 法における推計方法の特徴

初期値を $X^{(0)}$ としたときの（1-1）式と（1-2）式の組み合わせから構成される RAS 法の繰り返し計算において、得られた $X^{(k)}$ の列の和が s' であり、同時に行の和が r となったとき収束したとする。この繰り返しにより $X^{(k)}$ は k を限りなく大きくすれば、X に一意的に収束する。正数から構成される m 次元のベクトル $a'=(a_1 \cdots a_m)$ 、n 次元のベクトルを $b'=(b_1 \cdots b_n)$ として、

(2-1) $X_1^{(0)} = D(a)X^{(0)}D(b)$

とする。初期値を $X_1^{(0)}$ としたとき、RAS 法の繰り返し計算において $X_1^{(k)}$ が得られるとする。これを繰り返すことにより、

(2-2) $X_1^{(2k)} = R_1(k)X_1^{(0)}S_1(k)$

となる。この式における $R_1(k)$ は対角行列であり、（1-5）式において $X^{(k)}$ を $X_1^{(k)}$ と置き換えることで得られ、

(2-3) $R_1(k) = D(r)^k \{ D(X_1^{(2k-1)}l_n) \cdots D(X_1^{(1)}l_n) \}^{-1}$

である。同じように $S_1(k)$ は対角行列であり（1-6）式において $X^{(k)}$ を $X_1^{(k)}$ と置き換えることで得られ、

(2-4) $S_1(k) = \{ D(l_m' X_1^{(0)}) \cdots D(l_m' X_1^{(2k-2)}) \}^{-1} D(s)^k$

である。（2-2）式は、

(2-5) $X_1^{(2k)} = R_1(k)D(a)X^{(0)}D(b)S_1(k)$

と表すことができる。

数列の $s'\{\log D(b)S_1(k)\}l_n$ は（1-9）式より、

(2-6)
$$\begin{aligned} & s'\{\log D(b)S_1(k)\}l_n = s'\{\log S_1(k)\}l_n - s'\{\log D(b)\}l_n \\ & = \sum_{t=1}^{k} \{\xi_{s_1}^{(2t-2)} + s'\log D(b)^{-1/k} l_n\} \end{aligned}$$

となる。（2-6）式の｛ ｝の中を $t = 1 \cdots k$ に対して $\xi_{s*}^{(2t-2)}$ とおく。（1-10）式に準拠すれば、$\xi_{s*}^{(2t-2)} = s'\{D(s)D(l_m' X^{(2t-2)})^{-1}(D(b))^{-1/k}\}l_n$、となるのでこの式の｛ ｝の中を、

(2-7) $D(\varsigma_{s*}^{(2t-2)}) = D(s)D(l_m' X^{(2t-2)})^{-1}(D(b))^{-1/k}$

とすれば、$D(l_m' X^{(2t-2)}) = D(s)D(\varsigma_{s*}^{(2t-2)})^{-1} D(b)^{-1/k}$ であり、この両辺の左から l_m' を乗じれば、繰り返しが偶数回目の $X^{(2k-2)}$ における列の和が得られ、

(2-8) $l_m' X^{(2t-2)} = s' D(\varsigma_{s*}^{(2t-2)})^{-1} D(b)^{-1/k}$

と表される。t を限りなく大きくすれば、$\xi_{s*}^{(2t-2)} \to 0$ となる。任意の s に対して、$s'\{\log D(\varsigma_{s*}^{(2t-2)})\}l_n \to 0$ が成り立つので、$\{\log D(\varsigma_{s*}^{(2t-2)})\}l_n \to o_n$ となり、$D(\varsigma_{s*}^{(2t-2)})\} \to I_n$ となる。また、$D(c_s)^{-1/k} \to I_n$ である。t を k と置き換えれば、このことから（2-8）式は $l_m' X^{(2k-2)} \to s'$ となる。繰り返しが偶数回目のとき

は$X^{(2k-2)}l_n = r$なので$X^{(2k-2)}$は収束条件を満たしており収束する。同じようにすれば繰り返しが奇数回目のときも収束する。したがって、(2-5) 式において初期値を$X^{(0)}$としても$X_1^{(2k)}$は収束する。

(1-7) 式と (2-5) 式はともに$X^{(0)}$を初期値とする RAS 法の解であり、kを限りなく大きくすれば、一意的に収束するため$X_1^{(2k)} = X^{(2k)}$となる。しかしkが小さいときはこの関係は必ずしも満たされるとは限らない。(1-17) 式を利用すれば、(2-5) 式の対数から (1-7) 式の対数を差し引くことにより、

(2-9) $$\log X_1^{(2k)} - \log X^{(2k)} = \log D(c_k) l_m l_n' + l_m l_n' \log D(d_k)$$

が求められる。$D(c_k) = R_1(k) D(a) R(k)^{-1}$、$D(d_k) = S_1(k) D(b) S(k)^{-1}$である。

さらに、$\log X_1^{(2k)} - \log X^{(2k)} = W^{(2k)}$とおけば、

(2-10) $$\log D(c_k) l_m l_n' = -l_m l_n' \log D(d_k) + W^{(2k)}$$

となる。(2-10) 式の両辺に右からl_nを乗じた後、得られたベクトルを対角要素とする対角行列は、

(2-11) $$\begin{aligned}\log D(c_k) &= D\{(-l_n' \log D(d_k) l_n / n) l_m + (W^{(2k)} l_n / n)\} \\ &= D\{h_k l_m + (W^{(2k)} l_n / n)\}\end{aligned}$$

となる。ここで、$h_k = -l_n' \log D(d_k) l_n / n$はスカラーである。(2-11) 式から対数を取り除けば、

(2-12) $$D(c_k) = R_1(k) D(a) R(k)^{-1} = e^{h_k} D(e^{W^{(2k)} l_n / n})$$

が求められる。(2-10) 式の両辺に右からl_n、左からl_m'を乗じた後、mnで除した式は、

$$l_m' \log D(c_k) l_m / m = h_k + l_m' W^{(2k)} l_n / (mn)$$

となり、この左辺をg_kとおく。(2-11) 式と同じようにすれば、

(2-13) $$\log D(d_k) = D(-g_k l_m + (W^{(2k)\prime} l_m / m)$$

となり、(2-12) 式から対数を取り除けば、

(2-14) $$D(d_k) = S_1(k) D(b) S(k)^{-1} = e^{-g_k} D(e^{W^{(2k)\prime} l_m / m})$$

が求められる。

RAS 法の繰り返し計算において初期値を$X^{(0)}$とする RAS 法の解はkを限りなく大きくすれば、一意的に収束するため、$X_1^{(2k)} = X^{(2k)}$となる。したが

って、$W^{(2k)} \to O$ となることから $D\{\exp(W^{(2k)} l_n / n)\} \to I_m$ となり、（2-12）式は、

(2-15) $\qquad R_1(k)D(a)R(k)^{-1} = D(c_k) \to e^{h_k} I_m$

となる。(2-13)式は $l_m' \log D(c_k) l_m / m \to h_k$ となることから、$\log D(d_k) = -h_k I_n$ となり、

(2-16) $\qquad S_1(k)D(b)S(k)^{-1} = D(d_k) \to e^{-h_k} I_n$

となる。

以上のことから、RAS 法による繰り返し計算において初期値を $X^{(0)}$ と $X_1^{(0)} = D(a)X^{(0)}D(b)$ としたそれぞれの解は k を限りなく大きくすれば一致し、その解は初期値における $D(a)$ と $D(b)$ に対して無関係である。RAS 法の漸化式について前者は（1-7）式で表され、後者は（2-5）式で表される。両者の関係は（2-15）式と（2-16）式で示される。この関係は、

(2-17) $$\frac{\{l_m' D(c_k) l_m\}\{l_n' D(d_k) l_n\}/(mn) = e^{l_m' W^{(2k)} l_n/(mn)} \cdot}{\{l_m' D(e^{W^{(2k)} l_n / n}) l_m\}\{l_n' D(e^{W^{(2k)\prime} l_m / m}) l_n\}} \to 1$$

で表わされ、k を大きくすれば $W^{(2k)} \to O$ となり、$\exp(W^{(2k)}) \to l_m' l_n$ となるため（2-17）式は 1 になる。

3. 推計方法の具体例

RAS 法による取引額表の推計における具体例として $X^{(0)} = l_m l_n'$ としたときと、その $X^{(0)}$ に 0 が含まれている 2 つの例を取り上げる。$X_1^{(0)}$ は左右から対角行列を乗じた（2-1）式で与えられているとする。それぞれの例に対して求めたい取引額行列は $X^{(0)}$ と $X_1^{(0)}$ を初期値として、RAS 法の繰り返し計算により解を求めるが、得られたそれぞれの取引額行列 $X^{(2k)}$ と $X_1^{(2k)}$ の列の和が s' であり、同時に行の和が r となったとき収束したとする。

3.1 初期値を $X^{(0)}=l_m l_n'$ とするときの解

取引額表の推計における具体例として行列 $X^{(0)}=l_m l_n'$ とする。まず最初の初期値 $X_1^{(0)}$ は（2-1）式で与えられているとする。RAS 法における第 1 回目の奇数回目の繰り返し計算は（1-1）式を適用して $D(a)X^{(0)}D(b)$ を基礎として $X_1^{(1)}$ を作成する。$l_m'D(a)l_m=g_1$ とすれば、$l_m'X_1^{(0)}=\{l_m'D(a)l_m\}l_n'D(b)$ $=g_1b'$ となることから、$D(l_m'X_1^{(0)})=g_1D(b)$ となり、

(3-1)　　$S_1(1)=D(l_m'X_1^{(0)})^{-1}D(s)=D(b)^{-1}D(s)/g_1$

が求められ、

(3-2)　　$X_1^{(1)}=X_1^{(0)}S^*(1)=D(a)l_m l_n'D(s)/g_1$

となる。第 1 回目の偶数回目の繰り返し計算式は（1-2）式を適用して $X_1^{(1)}$ を基礎として $X_1^{(2)}$ を作成する。$D(X_1^{(1)}l_n)=(g/g_1)D(a)$ となるので、

(3-3)　　$R_1(1)=D(r)D(X_1^{(1)}l_n)^{-1}=D(r)D(a)^{-1}g_1/g$

が求められ、

(3-4)　　$X_1^{(2)}=R_1(1)X_1^{(1)}=D(r)l_m l_n'D(s)/g=D(r)X^{(0)}D(s)/g$

となる。（3-4）式は行と列の和がそれぞれ $l_m'X_1^{(2)}=\{l_n'D(r)l_m\}l_n'D(s)/g=s'$ と $X_1^{(2)}l_n=r$ となり収束条件を満たしているため第 1 回目の奇数回目と偶数回目を 1 組とした繰り返し計算において収束する。しかも $D(a)$ と $D(b)$ に無関係に収束する。

次に初期値を $X^{(0)}$ とする。第 1 回目の奇数回目の繰り返し計算は $D(l_m'X^{(0)})^{-1}=(1/m)I_n$ なので $D(l_m'X^{(0)})^{-1}=(1/m)I_n$ となり、

(3-5)　　$S(1)=D(l_m'X^{(0)})^{-1}D(s)=D(s)/m$

が求められ、

(3-6)　　$X^{(1)}=X^{(0)}S(1)=l_m l_n'D(s)/m$

となる。第 1 回目の偶数回目の繰り返し計算式は $D(X^{(1)}l_n)^{-1}=(m/g)l_m$ なので

(3-7)　　$R(1)=D(r)D(X^{(1)}l_n)^{-1}=D(r)m/g$

が求められ、

(3-8)　$X^{(2)} = R(1)X^{(1)} = D(r)l_m l_n' D(s)/g = D(r)WD(s)/g$

となる。$X^{(2)}$ は（3-4）式に一致し、1 回目の奇数回目と偶数回目を 1 組とした繰り返し計算で収束する。また $S_1(1)$ と $S(1)$ の関係は（3-1）式と（3-5）式から、

(3-9)　$S_1(1)D(b)S(1)^{-1} = (m/g_1)I_n$

と表される。同じように $R_1(1)$ と $R(1)$ の関係は（3-3）式と（3-7）式より、

(3-10)　$R(1)D(a)R(1)^{-1} = (g_1/m)I_m$

となる。特に、$a = r$ と $b = s$ とおけば（3-1）式と（3-2）式はそれぞれ $S_1(1) = I_n/g_1$ と $R_1(1) = I_m$ となる。

以上の結果を数値例でまとめたのが表 1 であり、初期値の $X^{(0)} = l_m l_n'$ は m が 9、n が 10 の場合である。RAS 法の基本となる行の和のベクトル r と列の和のベクトル s は表 1 の注に示されており、それぞれの和はともに 2450 である。RAS 法により収束した取引額表の $X^{(2k)}$ は（1-4）式の評価基準により得られた k に対する（1-7）式である。本章では数値解における繰り返し計算は、

(3-11)　$|(l_m' X^{(2k)} - s')l_n| < e$

となる e を収束のための評価基準として利用しており、この値を $1.0e-13$ としている。RAS 法による結果となる（1-7）式において $X^{(2k)}$ は表 1 の $X^{(2k)}$ で示され、対角行列の $R(k)$ と $S(k)$ は対角要素が R と S で示されている。繰り返し計算の評価基準もここに示されている。（$R(1), S(1)$:　1.847411e-13）は第 1 回目の繰り返し計算で収束し、そのときの評価基準が 1.847411e-13 であることを表している。

表1　初期値を$X^{(0)}=l_m l_n'$としたときRAS法により収束した$X^{(2k)}$と$X_1^{(2k)}$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
（$X^{(0)}=l_m l_n'$）										
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
:										
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
（$R(1),S(1)$：　1.847411e-13）										
(R)	1.8367	1.4693	1.2122	0.9918	0.7346	0.4775	0.3673	0.9183	0.9918	.
(S)	27.777	22.222	33.333	33.333	27.777	44.444	11.111	22.222	16.666	33.333
（$X_1^{(0)}=D(a)l_m l_n'D(b)$）										
1	4160	160	6080	1120	7280	4560	6720	2480	7040	1680
2	2548	98	3724	686	4459	2793	4116	1519	4312	1029
3	3380	130	4940	910	5915	3705	5460	2015	5720	1365
4	3588	138	5244	966	6279	3933	5796	2139	6072	1449
5	5096	196	7448	1372	8918	5586	8232	3038	8624	2058
6	1248	48	1824	336	2184	1368	2016	744	2112	504
7	3016	116	4408	812	5278	3306	4872	1798	5104	1218
8	3432	132	5016	924	6006	3762	5544	2046	5808	1386
9	5044	194	7372	1358	8827	5529	8148	3007	8536	2037
（$R_1(1),S_1(1)$：　7.105427e-14）										
(R)	1.5459	2.0192	1.2558	0.9679	0.5048	1.3398	0.4265	0.9369	0.6885	.
(S)	0.0079	0.1650	0.0065	0.0354	0.0045	0.0116	0.0020	0.0107	0.0028	0.0236
（$X^{(2k)}$，$X_1^{(2k)}$）										
1	51.020	40.816	61.224	61.224	51.020	81.632	20.408	40.816	30.612	61.224
2	40.816	32.653	48.979	48.979	40.816	65.306	16.326	32.653	24.489	48.979
3	33.673	26.938	40.408	40.408	33.673	53.877	13.469	26.938	20.204	40.408
4	27.551	22.040	33.061	33.061	27.551	44.081	11.020	22.040	16.530	33.061
5	20.408	16.326	24.489	24.489	20.408	32.653	8.163	16.326	12.244	24.489
6	13.265	10.612	15.918	15.918	13.265	21.224	5.306	10.612	7.959	15.918
7	10.204	8.163	12.244	12.244	10.204	16.326	4.081	8.163	6.122	12.244
8	25.510	20.408	30.612	30.612	25.510	40.816	10.204	20.408	15.306	30.612
9	27.551	22.040	33.061	33.061	27.551	44.081	11.020	22.040	16.530	33.061

（出所）著者作成。

（注）Nは行列の行番号、$r'=(500\ 400\ 330\ 270\ 200\ 130\ 100\ 250\ 270)$、$s'=(250\ 200\ 300\ 300\ 250\ 400\ 100\ 200\ 150\ 300)$、でありそれぞれの合計はともに2450である。また、$a'=(80\ 49\ 65\ 69\ 98\ 24\ 58\ 66\ 97)$、$b'=(52\ 2\ 76\ 14\ 91\ 57\ 84\ 31\ 88\ 21)$である。初期値が$X^{(0)}$に対して$R(1),S(1)$は1回目の繰り返し計算において収束し評価基準は1.847411e-13、初期値が$X_1^{(0)}=D(a)X^{(0)}D(b)$に対して$R_1(1),S_1(1)$は1回目の繰り返し計算において収束し評価基準は7.105427e-14であることを表している。

初期値が（2-1）式で表されている行列は $X_1^{(0)} = D(a)l_m l_n' D(b)$ 、で表され、対角行列の $R_1(k)$ と $S_1(k)$ は対角要素が R と S で示されている。（$R_1(1), S_1(1)$: 7.105427e-14）は第 1 回目の繰り返し計算で収束し、そのときの評価基準が 7.105427e-14 であることを表している。また、（2-17）式は（3-9）式と（3-10）式から、$\{l_m' D(c_k) l_m\}\{l_n' D(d_k) l_n\}/(mn)$ が 1 となる。

3.2 初期値の $X^{(0)}$ が 0 を含むときの解

初期値として 0 を要素として含む例として $X^{(0)} = l_m l_n'$ の要素に正規乱数を発生させいくつかの要素を 0 とする。それが表 2 の $X^{(0)}$ に示されている。RAS 法にこの初期値を適用する。表 2 に示されているように 171 回目の繰り返し計算により $X^{(2k)}$ に収束する。収束のための評価基準は 4.263256e-14 である。対角行列の $R(k)$ と $S(k)$ は対角要素が R と S で示されている。初期値が（2-1）式で表わされている行列は表 2 の $X_1^{(0)} = D(a)X^{(0)}D(b)$ 、で表わされ、対角行列の $R_1(k)$ と $S_1(k)$ は対角要素が R と S で示されている。171 回目の繰り返し計算により $X_1^{(2k)}$ に収束し、そのための評価基準は 8.526513e-14 である。

表2　初期値を0を含む$X^{(0)}$としたときRAS法により収束した$X^{(2k)}$と$X_1^{(2k)}$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
（$X^{(0)}$）										
1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
2	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
3	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
4	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
5	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
6	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
7	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0
8	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
9	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
（$R(171), S(171)$： 4.263256e-14）										
(R)	1.7383	1.2002	1.6614	0.4749	0.3968	0.3926	0.3578	18.180	0.5819	
(S)	41.328	9.1431	122.41	165.61	110.76	153.26	4.6082	78.972	25.751	62.700
（$X_1^{(0)} = D(a)X^{(0)}D(b)$）										
1	4160	0	0	0	0	4560	6720	0	7040	1680
2	2548	98	0	0	4459	0	4116	1519	4312	1029
3	3380	130	4940	0	0	0	0	0	5720	0
4	3588	138	0	966	6279	3933	0	0	6072	1449
5	0	0	7448	1372	0	5586	0	0	0	2058
6	1248	0	1824	0	0	0	0	744	2112	504
7	0	116	0	812	0	0	0	1798	5104	0
8	0	132	0	0	0	0	5544	0	0	0
9	5044	0	0	1358	8827	0	8148	3007	0	2037
（$R_1(171), S_1(171)$： 8.526513e-14）										
(R)	1.4820	1.6707	1.7433	0.4694	0.2762	1.1156	0.4208	18.788	0.4092	
(S)	0.0117	0.0670	0.0236	0.1734	0.0179	0.0394	0.0008	0.0374	0.0043	0.0438
（$X^{(2k)}, X_1^{(2k)}$）										
1	71.838	0.00	0.00	0.000	0.00	266.40	8.010	0.000	44.761	108.98
2	49.603	10.97	0.00	0.000	132.94	0.00	5.530	94.786	30.906	75.25
3	68.660	15.19	203.36	0.000	0.00	0.00	0.000	0.000	42.780	0.00
4	19.625	4.34	0.00	78.647	52.60	72.77	0.000	0.000	12.228	29.77
5	0.000	0.00	48.57	65.721	0.00	60.81	0.000	0.000	0.000	24.88
6	16.223	0.00	48.05	0.000	0.00	0.00	0.000	31.001	10.108	24.61
7	0.000	3.27	0.00	59.257	0.00	0.00	0.000	28.257	9.213	0.00
8	0.000	166.22	0.00	0.000	0.00	0.00	83.777	0.000	0.000	0.00
9	24.049	0.00	0.00	96.372	64.45	0.00	2.681	45.955	0.000	36.48

（出所）著者作成。

（注）表1に同じ。初期値が$X^{(0)}$に対して$R(171), S(171)$は171回目の繰り返し計算において収束し評価基準は4.263256e-14、$X_1^{(0)}$に対して$R_1(171), S_1(171)$は171回目の繰り返し計算において収束し評価基準は8.526513e-14である。

表 3　$R(k)D(a)R(k)^{-1}=D(c_k)$ となるときの c_k の要素の値

k	1	2	3	4	5	6	…	9
1	72.9995	65.0938	61.8472	72.6561	73.5071	62.2076		69.3763
2	70.6594	67.4803	65.3659	69.8492	69.3295	66.2537		68.5244
3	69.3818	68.0824	66.8277	68.9782	68.6338	67.4419		68.4610
4	68.7899	68.2355	67.5269	68.6230	68.4359	67.9023		68.4137
5	68.5143	68.2657	67.8718	68.4507	68.3537	68.0967		68.3654
6	68.3815	68.2629	68.0440	68.3591	68.3103	68.1800		68.3245
7	68.3143	68.2530	68.1302	68.3073	68.2836	68.2145		68.2935
8	68.2781	68.2432	68.1733	68.2764	68.2655	68.2271		68.2710
9	68.2571	68.2352	68.1946	68.2570	68.2526	68.2302		68.2549
10	68.2440	68.2290	68.2048	68.2442	68.2430	68.2292		68.2434
11	68.2352	68.2244	68.2094	68.2354	68.2357	68.2268		68.2351
12	68.2290	68.2208	68.2113	68.2291	68.2300	68.2239		68.2290
13	68.2245	68.2181	68.2117	68.2245	68.2255	68.2212		68.2245
14	68.2210	68.2160	68.2116	68.2210	68.2220	68.2188		68.2210
15	68.2183	68.2143	68.2112	68.2183	68.2192	68.2168		68.2183
:								
170	68.2074	68.2074	68.2074	68.2074	68.2074	68.2074		68.2074
171	68.2074	68.2074	68.2074	68.2074	68.2074	68.2074		68.2074

（出所）著者作成。

（注）RAS 法による繰り返しの回数は k、1 から 9 までの自然数は c_k の要素を表す。

表 4　$S(k)D(b)S(k)^{-1}=D(d_k)$ となるときの d_k の要素の値

k	1	2	3	4	5	…	9	10
1	0.01562	0.01629	0.01604	0.01242	0.01395		0.01739	0.01439
2	0.01481	0.01534	0.01553	0.01423	0.01469		0.01490	0.01434
3	0.01468	0.01507	0.01509	0.01450	0.01464		0.01469	0.01448
4	0.01466	0.01494	0.01487	0.01458	0.01462		0.01467	0.01456
5	0.01465	0.01486	0.01476	0.01461	0.01463		0.01466	0.01460
6	0.01465	0.01480	0.01471	0.01463	0.01463		0.01465	0.01462
7	0.01465	0.01477	0.01468	0.01464	0.01464		0.01465	0.01464
:								
171	0.01466	0.01466	0.01466	0.01466	0.01466		0.01466	0.01466

（出所）著者作成。

（注）RAS 法による繰り返しの回数は k、1 から 10 までの自然数は d_k の要素を表す。

表 5　$e_k = \{l_m' D(c_k) l_m\}\{l_n' D(d_k) l_n\}/(mn) \to 1$ となるときの値

k	e_k	k	e_k	k	e_k	k	e_k
1	1.011128	12	1.000181	23	1.000019	34	1.000002
2	1.002406	13	1.000146	24	1.000015	35	1.000002
3	1.001225	14	1.000118	25	1.000012	36	1.000001
4	1.000988	15	1.000096	26	1.000010	37	1.000001
5	1.000828	16	1.000078	27	1.000008	38	1.000001
6	1.000678	17	1.000063	28	1.000007	39	1.000000
7	1.000546	18	1.000051	29	1.000005	40	1.000000
8	1.000437	19	1.000042	30	1.000004	:	
9	1.000350	20	1.000034	31	1.000004	169	1.000000
10	1.000280	21	1.000028	32	1.000003	170	1.000000
11	1.000225	22	1.000023	33	1.000002	171	1.000000

（出所）著者作成。
（注）RAS 法による繰り返し計算の回数は k で表す。

初期値が $X^{(0)}$ のときの収束の基礎となる $R(k)$ と $S(k)$、$X_1^{(0)}$ のときの $R_1(k)$ と $S_1(k)$ の関係はそれぞれ（2-15）式と（2-16）式である。この例を示しているのが前者は表 3、後者は表 4 である。両表ともに k は繰り返しの一連番号、表頭の自然数は、前者は $D(c_k)$ における要素の $c_1(k) \cdots c_9(k)$、後者は $D(d_k)$ における要素の $d_1(k) \cdots d_{10}(k)$ を連番で表わしている。表 3 において k が小さいときは、$i \neq j$ に対する $c_i(k)$ と $c_j(k)$ の値は必ずしも一致していないのに対して、k が大きくなると一致してくるのを確かめることができる。これが（2-15）式で示されている。表 4 においても同じように k が小さいときは、$i \neq j$ に対する $d_i(k)$ と $d_j(k)$ の値は必ずしも一致していないのに対して k が大きくなると一致してくるのを確かめることができる。これが（2-16）式で示されている。（2-17）式で表わされている関係は表 5 に示されている。ここでも k が大きくなると 1 に近づいていくのを確かめることができる。

おわりに

取引額行列を推計するための RAS 法による繰り返し計算の解は限りなく大きい k に対して、繰り返し回数が奇数回目と偶数回目にかかわらず行列 $X^{(k)}$ は列の和は $l_m'X^{(k)} \to s'$ であり、同時に行の和は $X^{(k)}l_n \to r$ となり、収束することが示される。初期値を $X^{(0)}$ とすれば RAS 法の繰り返し計算による取引額表の解は一意に決定される。

また、初期値を $X^{(0)}$ と $X_1^{(0)} = D(a)X^{(0)}D(b)$ としたそれぞれの解は k を限りなく大きくすれば一致し、その解は初期値における $D(a)$ と $D(b)$ に対して無関係である。RAS 法の漸化式について前者は（1-7）式で表され、後者は（2-5）式で表される。両者の関係は（2-15）式と（2-16）式で示される。この関係は（2-17）式で示され、$\{l_m'D(c_k)l_m\}\{l_n'D(d_k)l_n)\}/(mn)$ は k を限りなく大きくすれば 1 になる。

〔参考文献〕

坂本慶行・石黒真木夫・北川源四郎［1983］『情報量統計学』共立出版。

野田容助［2006］「産業連関表における取引額の推計方法と評価ー等号制約条件付き最小 2 乗法とエントロピー最適化法の比較ー」（岡本信広・猪俣哲史編「国際産業連関ーアジア諸国の産業連関構造（V）」アジア国際産業連関表シリーズ No. 66、日本貿易振興機構アジア経済研究所）。

長谷川実［1974］「多次元分割表の取り扱いについて」『経営科学』18。

廣津千尋［1982］『離散データ解析』シリーズ新しい応用の数学 22、教育出版。