

第6章

対応関係におけるタイプの識別

野田 容助

はじめに

異なる分類体型をもつ分類Aと分類Bの間に相互にかかわりをもつ個別コードの対応関係があるとき、この分類AとBのコード間の閉じた対応関係の集まりをグループという。グループ化された対応関係を使用するには、2つの分類どうしがどのような対応関係にあるかを知ることが重要な問題になる。化学式を用いると水の構成要素である水素と酸素の関係は、結合の手を1つ持つ水素と結合の手を2つ持つ酸素が化合して互いの結合の手で過不足なく結ばれて H_2O と表され、 $\text{H}-\text{O}-\text{H}$ と図示される。この方式を利用して、それぞれの分類コードが相手の分類コードと何本の結合の手を持っているかということを分類のタイプ分けの基礎とする。

グループ化された対応関係の結合の組み合わせは、野田・山本によれば基本的にはタイプ1、タイプ2、タイプ3およびタイプ4の4つのタイプに分割することができる⁽¹⁾。分類Aから分類Bへの方角をもった対応関係が考えられるとき、タイプ1は分類Aと分類Bの個別コードの結合の関係が1対1の対応関係である。タイプ2はそれが1対多の対応関係であり、複数個ある分類Bの個別コードが1本ずつの結合の手を持つのにに対して、分類Aは1個の個別コードが分類Bの個別コードに対応する本数の結合の手をもつ対応関係の集まりである。タイプ3は多対1の対応関係であり、タイプ2とは逆に複数個ある分類Aの個別コードが1本ずつの結合の手を持つのにに対して、分類Bの1個の個別コードAは分類Bの個別コードに対応する個数の結合の手を持つ。タイプ4は多対多の対応関係を表し、タイプ1からタイプ3以外のタイプの集まりである。

本章ではタイプ4はさらにタイプ4Aとタイプ

4Bの2つに識別することができることと、その識別の根拠としている配分のウェイトの計算および推計方法についても紹介する。

配分ウェイトの計算というのは、グループ化された対応関係に存在する分類Aの個別分類コードの統計値をBへのそれぞれの個別分類コードへ適当なウェイトを考慮して配分するためのウェイトを求めることをいう。配分ウェイトの解は代数方程式で求めることにする。配分ウェイトを計算するさいに、0でないウェイトの個数にしたがってウェイトが一意的な解を持つ対応関係のグループと持たないグループに分かれる。タイプ4をさらに2つのグループに識別する根拠としてこの違いを利用する。配分ウェイトが一意的な解を持つ対応関係のグループをタイプ4A、一意的な解を持たない対応関係のグループをタイプ4Bとする。

この配分ウェイトによる識別方法を適用すると、タイプ1からタイプ3までのタイプはタイプ4Aの特殊なパターンとして識別ができることになる。

第1節 配分ウェイト w の計算

グループ内の分類Aの個別分類コードの個数を m 、分類Bの個別分類コードの個数を n とする。分類Aと分類Bの個別分類コードがすべての結合の手でつながっている対応関係を考えると、この対応関係は多対多なのでタイプ4になる。そのときの対応関係とそのときの配分ウェイトの配分構造は表1にまとめられている。表1では、 A_i は分類Aの個別分類コード、 $()$ の中の a_i は個別分類コード A_i に関連する統計値を表すものとする。他の変数についても同じである。 A_i から B_j への配分のためのウェイト

とは、いくつかの w_{ij} が 0 であることを意味している。したがって、一意に解が存在するのは mn 個あるウェイトの中で $(m-1)(n-1)$ 個のウェイトが 0、 $m+n-1$ 個のウェイトが 0 でない場合のみである。そのときの解 w は、

$$w = X^{-1}b \quad \dots\dots (4)$$

と表すことができる。

グループ内の 0 でないウェイトの個数は、グループ内にある対応関係の結合の手の数の合計に等しい。したがって、この情報を利用することによって、タイプ 4 の中で代数方程式によって一意的に解けるグループとそうでないグループを識別することができる。(3) 式の係数行列 X のランクが $m+n-1$ より大きく、その解 w が一意的な解を持たないグループをタイプ 4 B とする。解 w が一意的な解をもつグループをタイプ 4 A とする。

解 w が一意的な解をもつタイプ 4 A の特殊なパターンとして以下に示すように、係数行列のランクによってタイプ 1 からタイプ 3 の識別が可能である。

第 2 節 配分ウェイトが一意的な解を持つタイプの対応関係

2.1 タイプ 4 A の対応関係

グループ化された対応関係が分類 A の m 個の個別分類コードと分類 B の n 個の個別分類コードから構成されているとする。この対応関係の中で 0 でないウェイトが $m+n-1$ 個存在するグループはタイプ 4 A に属する。例えば、タイプ 4 A の対応関係とそのウェイトの配分構造の 1 つを表 2 に示す。この表を参照しつつ、列ベクトル w と a および行列 X を一意的な解が存在するように行と列を調整する。 $m+n-1$ 個の 0 でないウェイト w_{ij} は次のように取ることができる。

$$w = \begin{bmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{1n} \\ 0 \\ w_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ w_{33} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{mm} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

この w から 0 の要素を取り除いた $m+n-1$ 次の列ベクトルを改めて w とする。

$$w = (w_{11} \cdots w_{1n} w_{22} \cdots w_{mm})'$$

次に、 b は最下位の要素である $m+n$ 番目の要素を取り除き、 $m+n-1$ 次の列ベクトルとする。

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

係数行列 X はまず、 b と同じ番号である $m+n$ 行を取り除き、 $m+n-1$ 行にする。また、 w_{ij} を左上から右に移動し、その行の終わりに来たら次の行の左から右に移動するように一連番号を付ける。これから、ウェイト w_{ij} に対応する一連番号は $(i-1)n+j$ である。 X の列から w_{ij} の 0 の要素に対応する列を取り除き、 $(m+n-1) \times (m+n-1)$ 次行列とする。下記の X の列のうち、[] で示した 0 でない w_{ij} に対応したものだけを取り出す。

$$X = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} & w_{22} & \cdots & w_{mm} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & & 0 & \cdots & a_m \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

この例は $m < n$ の場合なので、 a_m の下は 0 になる。
 X のランクは $m+n-1$ になることが確かめられ、
 0 でないウエイトの w は (4) によって解くことができる。

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

2.2 タイプ 3 の対応関係

タイプ 3 の場合には分類 A と分類 B の個別分類コードの数をそれぞれ m 、 n とすれば、(3) 式において、 $m=1$ の場合に相当する。タイプ 3 の対応関係とそのウエイトの配分構造を表 3 に示す。配分ウエイト w 、 b 、係数行列 X は、

$$w = (w_{11} \cdots w_{1n} \ 0 \cdots 0)'$$

$$b = (1 \ 0 \cdots 0 \ b_1 \cdots b_{n-1} \ 0)'$$

となり、0 でない w の要素は $w_{11} \cdots w_{1n}$ の n 個、 b の 1 は 1 個と $b_1 \cdots b_{n-1}$ の合計個、 X は b の 0 に相当する一連番号の行を取り除き、同時に w の 0 に相当する一連番号の列も取り除く。次に、 w と b から 0 の要素を取り除き、改めてこれらを w と b とする。 X 、 w および b は、

$$w = (w_{11} \quad \cdots \quad w_{1n})'$$

となり、係数行列 X のランクは n となる。これはタイプ 4 A の X のランク $m+n-1$ において、 $m=1$ とおいた特殊な場合に相当する。

$$a_1 = b_1 + \cdots + b_n$$

なので、これを解くと、

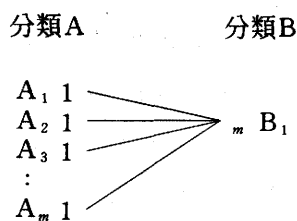
$$w_{ij} = b_j / (b_i + \cdots + b_n) \quad j=1 \cdots n$$

と得る。

2.3 タイプ 2 の対応関係

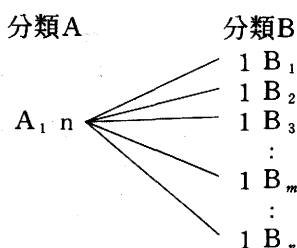
タイプ 2 の場合には分類 A と分類 B の個別分類コードの数をそれぞれ m 、 n とすれば、(3) 式において、 $n=1$ の場合に相当する。タイプ 2 の対応関係とそのウエイトの配分構造を表 4 に示す。配分ウエイト w 、 b 、係数行列 X は、

表 3 タイプ 3 の対応関係とそのウエイトの配分構造



	$B_1(b_1)$	$B_2(0)$	\cdots	$B_m(0)$	\cdots	$B_n(0)$	
$A_1(a_1)$	w_{11}	0	0	\cdots	0	\cdots	0
$A_2(a_2)$	w_{21}	0	0	\cdots	0	\cdots	0
\vdots	\vdots	\vdots			\vdots		\vdots
$A_m(a_m)$	w_{m1}	0	0	\cdots	0	\cdots	0

表 4 タイプ 2 の対応関係とそのウエイトの配分構造



	$B_1(b_1)$	$B_2(b_2)$	\cdots	$B_m(b_m)$	\cdots	$B_n(b_n)$	
$A_1(a_1)$	w_{11}	w_{12}	w_{13}	\cdots	w_{1m}	\cdots	w_{1n}
$A_2(0)$	0	0	0	\cdots	0	\cdots	0
\vdots	\vdots	\vdots			\vdots		\vdots
$A_m(0)$	0	0	0	\cdots	0	\cdots	0

表5 タイプ1の対応関係とそのウェイトの配分構造

分類A

分類B

$A_1 1 \text{ --- } 1 B_1$

	$B_1(0)$	$B_2(0)$...	$B_m(0)$...	$B_n(0)$	
$A_1(a_1)$	w_{11}	0	0	...	0	...	0
$A_2(0)$	0	0	0	...	0	...	0
\vdots	\vdots	\vdots			\vdots		\vdots
$A_m(0)$	0	0	0	...	0	...	0

$$w = \begin{bmatrix} w_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{21} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ w_{m1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b = (1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)'$$

となり、前回と同じようにXはbの0に相当する一連番号の行を取り除き、同時にwの0に相当する一連番号の列も取り除くと $m \times m$ 行列になり、

$$w = (w_{11} \quad \dots \quad w_{m1})'$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる、係数行列Xのランクはmである。これはタイプ4AのXのランク $m+n-1$ において、 $n=1$ とおいた特殊な場合に相当する。これを解いて、

$$w_{ji}=1 \quad j=1 \dots m$$

を得る。

2.4 タイプ1の対応関係

タイプ1の場合は(3)式において $m=1$ 、 $n=1$ に相当する。タイプ1の対応関係とそのウェイトの配分構造を表5に示す。配分ウェイトw、b、係

数行列Xは、

$$w = (w_{11} \ 0 \ \dots \ 0)'$$

$$b = (1 \ 0 \ \dots \ 0)'$$

なので、X、wおよびaを調整すると、

$$w = w_{11}$$

$$b = 1$$

$$X = 1$$

となり $w_{11}=1$ が導かれる。係数行列Xのランクは1である。これはタイプ4AのXのランク $m+n-1$ において、 $m=1$ 、 $n=1$ とおいた特殊な場合に相当する。0でないウェイトを他の変数 w_{ij} に変えても同じ結果を得る。

以上のことから分類Aと分類Bの個別分類コードの数をそれぞれm、nとすれば、対応関係のタイプ1、タイプ2、タイプ3、タイプ4Aおよびタイプ4Bは係数行列Xのランクがそれぞれ1、m、n、 $m+n-1$ 、 $m+n-1$ 以上によって識別されることになる。

第3節 配分ウェイトが一意的な解を持たないタイプ4Bの対応関係

代数的には一意的な解を持たないタイプ4Bの場合には、代数的な解ではなく特殊な条件のもとでの近似解で求めることになる。例えば、解wにある類似した経験あるいは個別的な理論にもとづく先験的な情報より得られたウェイトを初期値として与え、その値をもとに繰り返し計算で求める方法が考えられる。

その方法の1つとして、R. Stone の考案による

RAS 方式の近似計算がある。RAS の方法を簡単に説明する。

分類Aの m 個の統計量、 $a_1 \dots a_m$ を対角の要素とするような m 次対角行列を A 、ウェイトを $m \times n$ 行列 W とする。

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_m \end{bmatrix}$$

$$W(i) = \begin{bmatrix} w_{11}(i) & \dots & w_{1n}(i) \\ w_{21}(i) & \dots & w_{2n}(i) \\ \vdots & & \vdots \\ w_{m1}(i) & \dots & w_{mn}(i) \end{bmatrix}$$

ここで、 $W(i)$ となっているのは、求めたいウェイトを逐次解によって求めるから、 i 番目のウェイトの行列を表すようにしたためである。ウェイトの初期値を $W(0)$ とする。また、単位列ベクトルを $e = (1 \dots 1)'$ とする。初期値 $W(0)$ にもとずいて計算された分類Aの m 個の統計量を列ベクトル

$$a(0) = (a_1(0) \dots a_m(0))'$$

分類Bの n 個の統計量を列ベクトル

$$b(0) = (b_1(0) \dots b_n(0))'$$

とすれば、

$$e'AW(0) = b(0) \quad \dots\dots (5)$$

$$AW(0)e = a(0)$$

によって表される。修正係数を、

$$r_i(0) = a_i/a_i(0)$$

$$s_j(0) = b_j/b_j(0)$$

として、それらの各要素を対角要素とする行列を

$$R(0) = \begin{bmatrix} r_1(0) & 0 & & 0 \\ 0 & r_2(0) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & r_m(0) \end{bmatrix}$$

$$S(0) = \begin{bmatrix} s_1(0) & 0 & & 0 \\ 0 & s_2(0) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & s_n(0) \end{bmatrix}$$

とする。行 i に関する初めての修正は $r_i(0)$ によっておこなわれ、同時に列 j に関する初めての修正は $s_j(0)$ によっておこなわれる。第1回目のウェイトの解は、

$$W(1) = R(0) \cdot W(0) \cdot S(0)$$

となる。(5)に戻り、 $w(0)$ を $w(1)$ に変え、修正

係数を計算し直す。次の逐次解によって収束条件を満たすまで繰り返し計算をおこなう。

$$W(k+1) = R(k) \cdot W(k) \cdot S(k)$$

収束条件は修正係数である $r_i(k)$ $i=1 \dots m$ および $s_j(k)$ $j=1 \dots n$ が1に近くなることである。

第4節 グループ化された対応関係が $m=n=2$ の場合の例

分類Aと分類Bが個別分類コードをそれぞれ2個持つ対応関係のグループを例として考える。すなわち、グループ化された対応関係が $m=n=2$ の場合である。(3)式における係数行列 X は 4×4 行列、配分ウェイト w と b は4次のベクトルとなる。 w は0の要素を持たないとする。

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{21} \\ w_{22} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

係数行列 X のランクは3であるため、配分ウェイト w の要素に0がなければ X の逆行列が存在せず(3)式は一意には解を持たない。このグループ化された対応関係はタイプ4に属し、しかも配分ウェイトの解が一意的に得られないのでタイプ4Bである。

タイプ4Aの対応関係は配分ウェイトの0でない要素数が3の場合として w_{21} を0とする。ウェイトの条件式(2)より、

$$w_{22} = 1$$

がすぐに導き出され、ついで対応関係の式(1)より、

$$a_1 w_{11} = b_1$$

であることから w_{11} が得られ、さらに、

$$a_1 w_{12} + a_2 = b_2$$

から w_{12} が計算される。これらをまとめると、

$$w_{11} = b_1/a_1$$

$$w_{12} = (b_2 - a_2)/a_1$$

$$w_{21}=0$$

$$w_{22}=1$$

となる。 w_{21} ではなくて、どこを0にしても考え方はまったく同じである。

タイプ3の対応関係は配分ウェイトの0でない要素数が2の場合として、 w_{21} と w_{22} を0とする。

$$w_{11}=b_1/(b_1+b_2)$$

$$w_{12}=b_2/(b_1+b_2)$$

タイプ2の対応関係については、配分ウェイトの0でない要素数が2の場合の2番目として、 w_{12} と w_{22} を0とする。グループの中で B_2 への対応関係がなくなるため、この対応関係はタイプ2に属することになる。ウェイトの w_{11} と w_{21} はともに1個しかないので1となる。

タイプ1の対応関係は配分ウェイトの0でない要素数が2の場合の3番目として、 w_{12} と w_{21} を0とする。グループの中で A_1 と B_2 、 A_2 と B_1 の対応関係がなくなるため、この対応関係はタイプ1に属し、2つのグループに分離されることになる。タイプ1のウェイトは1なので、 w_{11} と w_{22} はともに1となる。 w_{11} と w_{22} をともに0にしても同じ結果を得る。ウェイトの要素数が1の場合として、 w_{12} 、 w_{21} および w_{22} を0とする。グループの中で A_1 と B_1 のみの対応関係となるため、この対応関係もタイプ1に属することになる。

おわりに

異なる体系をもつ2つの分類AとBがあり、分類Aから分類Bへ方向をもった対応関係が考えられるとき、グループ化された対応関係を分類Aから分類Bに対するタイプとしてタイプ1、タイプ2、タイプ3、タイプ4の4つのタイプに分割することができる。グループ化されたこれらの対応関係を図示すれば結合のパターンによりタイプ1からタイプ4までの4つの識別は簡単にできる。

配分ウェイトによる代数方程式の考えをもとにすれば、タイプ4はさらに配分ウェイトが一意的な解を持つタイプ4Aとそうではないタイプ4Bの2つ

のタイプに分割することが可能になる。しかも、タイプ1からタイプ3はタイプ4Aの特殊な場合として位置づけることができる。

結果として、分類Aと分類Bの個別分類コードの数をそれぞれ m 、 n とすれば、対応関係のタイプ1は係数行列 X のランクが1、タイプ2は X のランクが m 、タイプ3は X のランクが n 、タイプ4Aは X のランクが $m+n-1$ 、タイプ4Bは係数行列 X のランクが $m+n-1$ 以上によって識別されることになる。

逆の見方をすれば、対応関係のタイプはタイプ1からタイプ4Bに分割される。したがって、配分ウェイトの方程式の係数行列 X のランクは1、 m 、 n 、 $m+n-1$ 以上しか存在しないということである。このことから、グループ化された分類Aと分類Bとの対応関係を線で結びつけたとき、タイプ4の中で線の数 $m+n-1$ であれば、タイプ4Aであり、それ以上の線があればタイプ4Bであると判断できる。

本章ではグループ化された対応関係のタイプを識別することのみに焦点を絞ったが、それは第5章で使用された「切断モデル」のグループ化のタイプを説明するためだからである。配分ウェイトの本来の課題は分類が改訂されたときに統計量をできるだけなめらかにその改訂時点につなげることである。分類のカテゴリー上は整合性のある対応関係でも、統計値という量がかかわってくると必ずしも単純に配分ウェイトが計算できるとは思われない。経済統計にありがちな変動部分を調整する必要が生じることが想定される。したがって、今後の課題としては実際に分類の改訂が行われた経済統計に対して、この方法で実証してみ、その経済統計固有の計算方法あるいは推計方法を検討することである。

注

(1) 野田容助、山本泰子の「体型の異なる分類の対応関係と変換—グループ化および切断による商品分類の変換の試み—」では注釈で「…説明は省略するが、タイプ4には配分ウェイトが代数方程式

により一意的な解を持つタイプ 4 a と一意的に解を持たないタイプ 4 b に分けることができる。」(p 79) と説明している。

【参考文献】

[1] 金子敬生、『産業連関の理論と適用』新版、日本評論社、1971

[2] 野田容助、山本泰子「体型の異なる分類の対

応関係と変換－グループ化および切断による商品分類の変換の試み－」(木下宗七、野田容助編『世界貿易統計データシステムの整備と利用』、統計資料シリーズ No. 67、アジア経済研究所、1995)

[3] 野田容助「国際産業統計分類における改訂第 2 版と同第 3 版の対応関係－グループ化による対応関係の検討－」(川村鎰男、野田容助共編著『国際産業データシステムの利用と応用』、統計資料シリーズ No. 69、アジア経済研究所、1996)