第３章

商品分類統一のための配分ウエイト行列の推計と変換

野田容助

はじめに

貿易データを同一の商品分類において長期時系列データとして利用するには商品分類の改訂前後のどちらかの商品分類へ統一して評価することが必要である。商品分類の統一化は改訂前後の商品分類の対応関係にもとづいて配分ウエイトを推計し、この配分ウエイトでそれぞれの分類コードに対応する取引額および数量を再配分することで可能となる。

UN 作成の Website による on-line 検索から得られる UN Comtrade Database 貿易データでは商品分類改訂後の新商品分類コードから旧商品分類コードへの変換がおこなわれており、旧商品分類による貿易データの長期時系列的な利用を可能にしている。UN の推計方法は変換のための対応表を基礎とした配分構造を考慮しない、また報告国あるいは輸出入による違いを考慮しない一律確定方式が採用されており、UN も認めているように粗い推計方法である。これに対して、アジア経済研究所が試みている推計方法は商品グループ内における対応関係の配分構造と報告国、輸出入区分ごとの取引額を考慮した推計方法である。

配分ウエイト行列の推計方法は野田［8］の「商品分類の対応関係における配分ウエイトの推計方法」で紹介されているように取引金額を考慮しないかするか、また配分構造を持つかどうかにより大雑把に分類することができる。表１に示されているよう取引額と配分構造を同時に考慮している推計方法は、商品分類改訂前後の商品分類を互いに独立と仮定したウエイトの同一配分パターン方法（*i* 方式）、等号制約条件付きの最小 2 乗法（*wm* 方式）とその別の解法である回帰式による方法（*wv* 方式）、エントロピー最適化法による繰り返しの比例反復法（*e* 方式）、ニューラル・ネットワークの方法である。取引額を考慮せずに対応関係の構造のみを考慮する推計方法が単純均等配分法（*s* 方式）である。UN が採用している推計方法（*un_c* 方式）や OECD の推計方式も取引額を考慮しない方法である。

本章の目的はアジア経済研究所で試みている配分ウエイト行列の構造を示すとともに、その推計方法の紹介と推計された配分ウエイト行列にもとづいて変換された貿易データの変化から推計方法の特徴を紹介することである。採用している配分ウエイト行列の推計方法は *i,wm,s* 方式と *i* の特殊解にあたる最大ウエイトを１、それ以外を 0 に置き換える UN に準拠した *u* 方式、負の推定値および最終調整としてこれらの推計結果を初期値としてエントロピー最適化法に適用した *s2,wm2* 方式である。

本章は野田［8］および野田・深尾［10］の「同一商品分類に変換された貿易額の比較―配分ウエイトにおける推計方法の違いを中心に―」の配分ウエイト行列の推計方法にもとづき、それらを部分的に改訂、補強したものである。本章

表１　アジア経済研究所で試みている対応関係の配分ウエイト推計方法

取引額＼配分構造	配分構造なし	配分構造あり
取引額を考慮しない	(1) 木下・山田方式 (2) OECD 方式 (3) UN Comtrade 方式*（*un_c*）	(1) 単純均等配分方式（*s*） (2) 黒子の均等配分方式 (3) SITC-R2 から SITC-R1 への変換方式
取引額を考慮する	(1) アジ研の *u* 方式*（*u*）	(1) 同一配分パターン方式（*i*）* (2) ウエイト等号制約条件付き最小 2 乗法（*wv, wm*） (3) ニューラル･ネットワークの方式（*n*） (4) エントロピー最適化法（*e*）

（出所）野田容助編『東アジア諸国・地域の貿易指数―作成から応用までの基礎的課題―』(SDS No.88, アジア経済研究所, 2005）の第 2 章の表 12 にもとづき著者作成。

（注）アジア経済研究所が試みている配分ウエイトの推計方法である。分類 *A* から分類 *B* の方向に対する対応関係に対して、*は分類 *B* のみの取引額を利用することを表わしている。UN Comtrade 方式とアジ研の *u* 方式は共に推計に当たっては配分構造を考慮しているが推計結果が 1 つの分類コードに決まることから配分構造なしの分類に入れている。( ) の中の文字は推計方式を簡略化して表わしたものである。

は第 1 節の配分ウエイト行列の構造、第 2 節の等号制約条件付き最小 2 乗法、第 3 節の分割表にもとづく配分ウエイト行列の推計、第 4 節の推計方式の違いによる配分ウエイト行列の特徴、第 5 節の変換された貿易データの特徴、から構成されている。第 4 節において、分類間の独立性を仮定した同一配分パターン方式、単純均等配分方式はエントロピー最適化法の特殊解であることが示される。

１．配分ウエイト行列の構造

商品分類の改訂に伴って作成される新旧それぞれの商品分類である分類 *A* と *B* において、分類 *A* から *B* への対応関係をもとに前者の取引額を変換して後者の取引額を推計するとき、その変換のフィルターの役割を果たすのが配分ウエイト行列である。配分ウエイト行列は商品分類の改訂前後のそれぞれの取引額を利用して推計されるがそのために以下で説明するような仮説が必要となる。この仮説を変換可能であるための仮説といい、グループ化された分類 *A* から *B* への配分ウエイト行列をもとに前者の取引額を後者のそれに変換するための配分構造が定式化される。

1.1　変換可能であるための仮説

商品グループ内における分類 *A* から *B* の方向に対する対応関係が存在するとき、商品分類の改訂前後のそれぞれの期間にこの両分類による取引額の構造は多変量定常確率過程により生成されるものとする。すなわち、分類 *A* における取引額の構成比はその期間において *A* の取引額の真の構造に対して無作為抽出によって得られた標本として解釈する。同じように分類 *B* についても *B* の取引額は真の構造に対する無作為抽出による標本とする。しかもその期間に両分類によるそれぞれの標本が同時に得られるものとする。

実際には同一期間からは両分類の取引額の構成比に相当する標本は得られず、両分類の取引額の構成比は商品分類における改訂前後の期間からそれぞれ得られる。この仮説は改訂前の期間から得られた標本が改訂後の期間から得られた標本と同一の無作為抽出から求められるとい

図１ 分類 A から分類 B の方向に対する貿易額 X から Y への変換とその構造

分類 ＼ 年		1962 ····· 1975	1976 ······ 1987
分類 A （SITC-R2）	$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$	·····	$X = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1h} \\ & & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nh} \end{pmatrix}$
		配分ウエイト行列 $\widetilde{W}$ ↓	Y=WX
分類 B （SITC-R1）	$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$	$Y = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1k} \\ & & \\ y_{m1} & \cdots & y_{mk} \end{pmatrix}$	$\hat{Y} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1' \\ \vdots \\ \hat{y}_m' \end{pmatrix}$

（出所）著者作成。

（注）UN Comtrade Database 貿易データにおける報告国の日本の商品分類を例としている。影の部分が実際に存在するデータであり、··· は欠損値、$y_i' = (y_{i,1962} \ \cdots \ y_{i,1975})$、$x_j' = (x_{j,1976} \ \cdots \ x_{j,1987})$、$\hat{Y}$ は推計値を表わす。

う相当に強い仮説といえる。ここで重要なことは、この仮説は改訂前の分類 B の構造がそのまま改訂後にも同じように維持されていることであり、しかも得られる標本は取引額そのものではなくその構造を示す構成比としていることである。貿易データのような経済データにはトレンドや各種の周期を内蔵しており、取引額そのものは一般的には大きく変動する傾向にあることによる。

図 1 は UN 作成による UN Comtrade Database 貿易データの報告国日本における商品分類の改訂前後を示したものである。この図において分類 A は 1976 年から 1987 年までを対象とする SITC-R2、分類 B は 1962 年から 1975 年までを対象とする SITC-R1 をそれぞれ表わしており、影の付いているところが実際に得られる貿易データである。この仮説において実際には存在していない 1976 年から 1987 年までの期間において分類 B の取引額の構成比が同時に得られることを可能にしている。したがって、1976 年から 1987 年までについては分類 A と B の取引額の構成比は同時に得られることになる。さらに、得られた両分類の取引額の構成比は時系列データの特性を考慮せずに、両者それぞれの分類が持つ構造から得られた無作為抽出による標本としている。

図 1 において、商品グループ内における分類 A の n 個ある個別分類コードの $a_1 \cdots a_n$ のそれぞれに統計値である n 個の取引額 $x_1{}^D \cdots x_n{}^D$ が対応しているとする。右上に D で表わされている変数が取引額を表わしている。図 1 では D が示されていないが、この時点では D が付いているものとする。$j = 1 \cdots n$ に対して、x_j は年次データに相当する h 個の標本から構成されるベクトルとして表わされ、$x_j{}^D = (x_{j1}{}^D \cdots x_{jh}{}^D)'$ である。図 1 において、h は 1976 年から 1987 年までの期間を一連番号で表わしているため 12 となる。$(x_1{}^D \cdots x_n{}^D)' = X^D$ とすれば、

$$\begin{pmatrix} x_1{}^{D\prime} \\ \vdots \\ x_n{}^{D\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}{}^D & \cdots & x_{1h}{}^D \\ & & \\ x_{n1}{}^D & \cdots & x_{nh}{}^D \end{pmatrix} = X^D$$

となる。したがって、分類 A のある期間の取引額の行列は $n \times k$ 行列の X^D で表わされる。

同一商品グループ内の分類 B の m 個ある個別分類コードの $b_1 \cdots b_m$ のそれぞれに対する統計値を $y_1{}^D \cdots y_m{}^D$ とする。年次データの $y_i{}^D$ は k

個の標本から構成されるベクトルで表わされ、$i=1\cdots m$ に対して $y_i^D=(y_{i1}{}^D \cdots y_{ik}{}^D)'$ である。図 1 において、k は 1962 年から 1975 年までの期間を一連番号で表わしているため 14 となる。$(y_1{}^D \cdots y_m{}^D)' = Y^D$ とすれば、

$$\begin{pmatrix} y_1{}^{D}{}' \\ \vdots \\ y_m{}^{D}{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}{}^D & \cdots & y_{1k}{}^D \\ \\ y_{m1}{}^D & \cdots & y_{mk}{}^D \end{pmatrix} = Y^D$$

となり、分類 B の取引額の行列は $m \times k$ 行列の Y^D で表わされる。取引額の行列 X^D と Y^D の標本数である年次データの個数をそれぞれ h と k としているが、実際においても両者の個数が一致することはほとんどないということに注意すべきである。

このままでは同一年の取引額は分類 A と B とに同時に配分されているという仮説の意味する同一年の分類 A の取引額がすべて配分ウエイトによって分類 B の取引額へ変換される条件が与えられていない。分類 A から B への変換において年次を表わす j に対して前者の取引額である $(x_{1j}{}^D \cdots x_{nj}{}^D)$ の合計は配分されて後者の取引額 $(y_{1j}{}^D \cdots y_{mj}{}^D)$ の合計と一致しなければならない。しかも、これがすべての年において成り立つわけであるから、煩雑さを避けるために $h=k$ とすれば、取引額の年毎の和は一致し、$l_n{}'X = l_m{}'Y$ となることから、

(1-1) $$(x_{\bullet 1}{}^D \cdots x_{\bullet k}{}^D) = (y_{\bullet 1}{}^D \cdots y_{\bullet k}{}^D)$$

となる。ここで、$\bullet$ は対象とするすべての和を表わし、

$$y_{\bullet j}{}^D = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}{}^D$$

とする。商品グループ全体でも分類 A の取引額がそのまま分類 B へ維持されるため、$x_{\bullet}{}^D = y_{\bullet}{}^D$ となる。すなわち、$j=1\cdots k$ に対して $y_{\bullet j}{}^D = x_{\bullet j}{}^D$ が一定の値を取ればいいわけであるからその定数を 1 とする。分類 A と B のそれぞれの取引額の行列 X,Y に対して構成比を取ることでこの条件を満足できる。$D(x)$ をベクトル x を対角要素とする対角行列とする。X^D については、

$$X = X^D D(l_m{}'X^D)^{-1}$$

として構成比を要素とする行列を計算することで行列 X が作成できる。Y^D についても同じように、$Y = Y^D D(l_n{}'Y^D)^{-1}$ として Y を作成できる。構成比を用いることにより必ずしもではないが、貿易データが持つ長期トレンドや周期を含めた経済変動から生ずる経済変動固有の一部の変動を取り除くことができる。

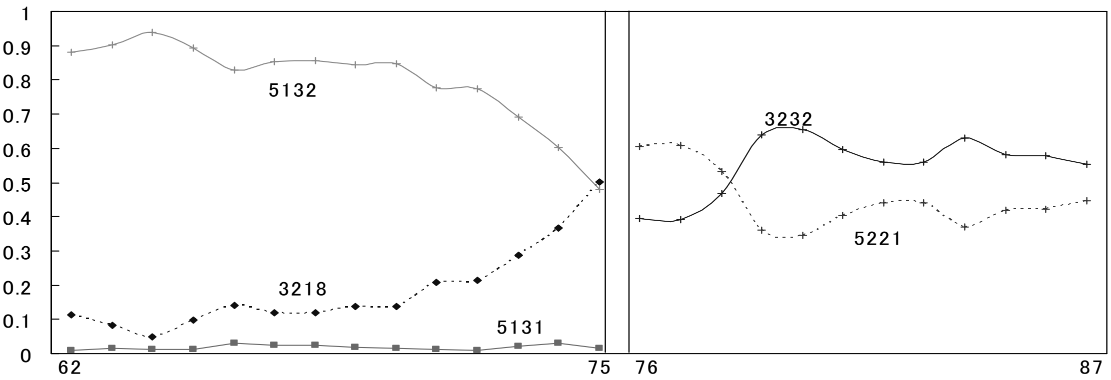
しかしこれらの要因は多くの場合には必ずしも取り除かれると限らない。図 2 は UN Comtrade Database 貿易データの報告国日本における SITC-R1 と SITC-R2 の 4 桁レベル分類コードにおける対応関係の商品グループ 0212 の取引額の輸出構成比を示したものである。この商品グループは SITC-R1 の 3 つの個別分類コード 3218,5131,5132 と SITC-R2 の 2 つの個別分類コード 3232,5221 の対応関係から構成されており、SITC-R1 において分類コードの 3218 と 5132 の構成比が 1962 年の頃と 1975 年の頃では大きく異なっており、SITC-R2 では分類コードの 3232 と 5221 の構成比が逆になっているのを確認できる。

1.2 対応関係のすべてが存在する配分ウエイト行列の構造

商品グループ内における分類 A から B の方向に対する変換として ω_{ij} は分類コード a_j から b_i への方向に対する配分ウエイトとする。表 2 に示されているように、対応関係には分類すべての要素が存在していると仮定する。すなわち、配分ウエイトは、$\omega_{ij} \neq 0$ である。同一年の取引額は分類 A と B とに同時に配分されているという仮説より、分類 A の取引額の構成比がすべて配分ウエイトによって分類 B の取引額の構成比へ変換されるとする。表 2 の影で示された分類

図２　4 桁レベル分類コードによる商品グループ 212 の日本の輸出額比率　　　　（単位 : %）

(1) SITC-R1 (3218,5131,5132)　　　　　　　　　　(2) SITC-R2 (3232,5221)



（出所）野田容助編『東アジア諸国・地域の貿易指数—作成から応用までの基礎的課題—』（SDS No.88 アジア経済研究所 2005）の第 2 章の図 1 を引用。

（注）UN Comtrade Database 貿易データにおける報告国の日本の例である。商品分類は 1962 年から 75 年までは SITC-R1、76 年から 87 年までは SITC-R2 である。SITC-R1 と SITC-R2 の対応関係において前者の 3218,5131,5132 と後者の 3232,5221 は 1 つの商品グループを構成している。左側の図は SITC-R1 の 3218 (y_1), 5131 (y_2), 5132 (y_3)、右側は SITC-R2 の 3232, (x_1), 5221 (x_2)の取引額の構成比である。

B における b_i の y_i' は分類 A の配分ウエイトの対応関係から $i=1\cdots m$ に対して、

$$y_i' = x_1'\omega_{i1} + \cdots + x_n'\omega_{in} + u_i'$$

と表すことができる。配分ウエイトは $j=1\cdots n$ に対して、

(1-2)　$$\omega_{1j} + \cdots + \omega_{mj} = 1$$

であり、u_i は y_i と同じ構造を持つベクトルの撹乱項である。

すべての要素が 1 からなる m 次元のベクトルを l_m とする。分類 A から B の方向に対する対応関係においてすべてが対応している $m \times n$ 行列の配分ウエイト行列を W とすれば、

$$W = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{m1} & \cdots & \omega_{mn} \end{pmatrix}$$

であり、配分ウエイト行列の特徴は（1-2）式から、W のすべての列の和が 1 となることなので、

(1-3)　$$l_m' W = l_n'$$

となるウエイト条件が満たされる。分類 A と分類 B の取引額の X,Y と配分ウエイト行列 W を行列表示でまとめると、

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{m1} & \cdots & \omega_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1' \\ \vdots \\ u_m' \end{pmatrix}$$

となる。撹乱項も同じように $m \times k$ 行列として U とする。すべてに対応関係があるときの取引額に対する配分ウエイトの構造は、（1-3）式のウエイト条件のもとで

(1-4)　$$Y = WX + U$$

と表すことができる。（1-4）式と X,Y との整合性は、（1-4) 式から、$l_m'Y = l_m'WX = l_n'X$ となり、（1-1) 式が得られることから確かめられる。

1.3　対応しない関係が存在する配分ウエイト行列の構造

商品分類の対応関係では商品グループ内に分類 A の a_j と分類 B の b_i それぞれの個別分類コード間に対応関係がない状態が存在するのが一般的である。このような状態は配分ウエイト

表２　商品グループ内における分類Aから分類Bに向けた変換の配分構造と配分額

分類B ＼ 分類A	a_1	a_2	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n	*Total*
b_1	$x_1'\omega_{11}$	$x_2'\omega_{12}$		$x_j'\omega_{1j}$		$x_n'\omega_{1n}$	y_1'
:	:	:		:		:	:
b_i	$x_1'\omega_{i1}$	$x_2'\omega_{i2}$		$x_j'\omega_{ij}$		$x_n'\omega_{in}$	$y_i'=(y_{i1}\cdots y_{ik})$
:	:	:		:		:	:
b_m	$x_1'\omega_{m1}$	$x_2'\omega_{m2}$		$x_j'\omega_{mj}$		$x_n'\omega_{mn}$	y_m'
Total	x_1'	x_2'		$x_j'=(x_{j1}\cdots x_{jk})$		x_n'	$x_\bullet'=y_\bullet'=l_k'$

（出所）著者作成。

（注）商品グループ内における分類Aの$a_1\cdots a_n$から分類Bのb_iに向けた変換の配分構造である。$\omega_{ij\,j}$は分類コード商品グループ内におけるa_jからb_iへの方向に対する配分ウエイトである。年次を$1\cdots k$とするとき、a_jの取引額は$x_j'=(x_{j1}\cdots x_{jk})$、$b_i$の取引額は$y_i'=(y_{i1}\cdots y_{ik})$として共にベクトルで表わされる。

行列において0となる要素が存在する状態であり、要素として$\omega_{ij}=0$を含む一般的な配分ウエイト行列をW_gとする。一般的な配分ウエイト行列は（1-2）式のウエイトの条件と（1-4）式の構造式と同じようにウエイト条件として、

(1-5)　$$l_m'W_g=l_n'$$

が満たされ、この配分ウエイト行列に対して構造式は、

(1-6)　$$Y=W_gX+U$$

と表すことができる。以上のことから、本章の目的は商品グループ内に存在する分類Aと分類Bの対応関係とそれぞれの分類に対応する構成比で構成された取引額行列XとYが得られたとき、（1-5）式と（1-6）式から配分ウエイト行列W_gを推計することになる。

分類Aから分類Bの方向に対する配分ウエイト行列W_gが得られると逆の方向である分類Bから分類Aの方向の配分ウエイト行列も簡単に計算できる。表2において、分類Aから分類Bの方向の配分額が示されており、配分額を表わす行列は、$1\cdots k$の年次kに対して、$W_gD(x_{1k}\cdots x_{nk})$である。ここで、$D(x)$はベクトル$x$が与えられたときその要素を対角要素として非対角要素をすべて0とする対角行列を表わす。これを利用して同じ年度kにおける分類Bから分類Aの方向の配分ウエイト行列は、

(1-7)　$$W_g^\bullet=D(y_{1k}\cdots y_{mk})^{-1}W_gD(x_1\cdots x_n)$$

として表わされる。

1.4　仮説によって得られる取引額Yの意味

配分ウエイト行列の構造が（1-3）式と（1-4）式で表わされるための仮説は商品分類の改訂前の期間から得られた標本が改訂後の期間から得られた標本と同一の無作為抽出から求められるということであり、改訂前の分類Bの構造がそのまま改訂後にも同じように維持されていることである。改訂年前後には異なる分類体系である分類Aの取引額Xと分類Bの取引額Yがそれぞれ重なりのない期間に個別に存在している状態であるが、この仮説により実際には存在しない期間に分類Bの取引額が得られた状態になっている。したがって、同一期間に分類AとBの両者の取引額が得られることになり、配分ウエイト行列Wの推計を可能とする。

仮説により分類Bの取引額の構成比Yが得られているのに配分ウエイト行列により改めてY

を推計する必要があるかという疑問が生ずる。確かに Y から X の年ごとの総額を利用すれば、取引額は、

$$\hat{Y}^D = YD(l_n' X)$$

として計算することができる。この推計値は後の節で示すが、配分ウエイト行列の特殊な推計方法として説明される。本章では一般的な配分ウエイト行列による推計方法とそれにもとづく取引額の変換を検討しているため、仮定によって得られた Y を直接推計値として利用せずに、この Y をもとにして配分ウエイト行列 W を推計し、この W から Y^D を求めることを検討課題としている。

W が推計されれば、(1-4) 式により既存の X から分類 B には存在しなかった $\hat{Y}$ を推計することができる。したがって、変換後には分類 A でしか存在しなかった取引額が分類 B によって推計されているため、分類 B にもとづく時系列データの取引額 $(Y, \hat{Y})$ の利用が可能となる。表 2 において、$k = 1976 \cdots 1987$ に対して、

$$(\hat{y}_{1k} \cdots \hat{y}_{mk})' = \hat{W}(x_{1k} \cdots x_{mk})'$$

となることから推計された $\hat{Y}$ が求められる。したがって、分類 A でしか存在しなかった 1976 年から 1987 年まで取引額が分類 B によって推計されているため、分類 B にもとづく 1962 年から 1987 年までの時系列データの取引額の利用が可能となる。

2．等号制約条件付き最小 2 乗法

ウエイトの等号制約条件付き最小 2 乗法の中で配分ウエイト行列を行列のまま直接的に解くゼロ制約を考慮した等号条件付最小 2 乗法は野田［7］の「分類統一のための配分ウエイト行列の推計―ウエイト既知値を等号制約条件とする最小 2 乗法―」で紹介されており、これを *wm* 方式という。配分ウエイト行列をベクトルに置き換えてウエイトが 0 の要素を取り除いて線形回帰式による解を求める方法は野田［8］の「対応関係における配分ウエイトの推計―回帰式によるウエイト制約条件付き最小 2 乗法―」で紹介されている。これを *wv* 方式という。本節では前者の概要のみを示す。

2.1 行列を直接的に推計する方法

分類 A から B の方向に対する変換として対応関係にはすべての要素が存在していると仮定するとき、配分ウエイト行列 W は (1-3) 式のウエイト条件が満たされ、取引額に対する配分ウエイトの構造は (1-3) 式のもとで (1-4) 式により表すことができる。最初はすべての対応関係が存在するときの配分ウエイト行列の推計方法を示し、配分ウエイト行列の要素の 1 個が 0 であるときのゼロ制約による制約条件付き最小 2 乗法による推計方法、配分ウエイト行列の要素の 2 個が 0 であるときの推計方法、一般的な配分ウエイト行列のゼロ制約によるウエイト制約条件付き最小 2 乗法を示す。

制約条件なしの最小 2 乗法はすべてに対応していると仮定された配分ウエイト行列 W に対して、(1-4) 式における U の最小 2 乗法を利用して W の推定量を求める方法である。最小 2 乗法の定義には一般化分散や全変動等を最小にするいくつかの方法があるが本章では後者を基礎とする。すなわち、この方法は (1-4) 式の U に対して、

$$s = tr(UU') = tr\{(u_1 \cdots u_n)'(u_1 \cdots u_n)\} \quad (2\text{-}1)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} u_i' u_i$$

として、(2-1) 式を行列 W の要素で偏微分して 0 と置いたときの W を解とする。この方法では (2-1) 式はスカラーとなり、

$$tr(UU') = tr\{YY' - WXY' - YXW' + WXX'W'\} \quad (2\text{-}2)$$

である。したがって、(2-2) 式における右辺の

第2項目と第3項目は、

$$\partial tr(WXY')/\partial W=\partial tr(YX'W')/\partial W \\ =YX'$$

である。(2-2) 式における右辺の第4項目は、

$$\partial tr(WXX'W')/\partial W=2WXX'$$

となる。$\partial s/\partial W=0$ となる解を求めるので、$YX'-WXX'=0$ となる。XX' が正則であれば逆行列が存在するので、

(2-3) $$\hat{W}=YX'(XX')^{-1}$$

とする。これがウエイト制約条件なしの最小 2 乗法による解である。

ウエイト制約条件付きの最小2乗法はすべてに対応していると仮定された配分ウエイト行列 W に対して、ウエイト条件の (1-3) 式と (1-4) 式における U の最小 2 乗法を利用して W の推定量を求める方法である。すなわち、この方法は、$\lambda'=(\lambda_1\cdots\lambda_n)$ とするとき、

(2-4) $$s_2=tr(UU')-(l_m'W-l_n')2\lambda$$

として、(2-4) 式を行列 W の要素で偏微分して 0 と置いたときの解であり、これを $\tilde{W}_0$ とする。スカラーである (2-4) 式に対する行列 W の偏微分の結果は、$\partial s_2/\partial W=0$ から、

$$-YX'+\tilde{W}_0XX'-l_m\lambda'=0$$

である。XX' が正則であれば、得られた解が $\tilde{W}_0$ である。(2-3) 式を利用すれば、

(2-5) $$\tilde{W}_0=YX'(XX')^{-1}+l_m\lambda'(XX')^{-1} \\ =\hat{W}+l_m\lambda'(XX')^{-1}$$

となる。(2-4) 式に対するベクトル λ の偏微分の結果は $\partial s_2/\partial\lambda=0$ から、$l_m'\tilde{W}-l_n'=0$ が得られる。これはウエイト条件である (1-3) 式そのものである。(2-5) 式の両辺に対して左から l_m' を乗ずると、

$$l_m'\tilde{W}=l_m'\hat{W}+m\lambda'(XX')^{-1}$$

となり、左辺は (1-3) 式から l_n' となるので、$\lambda'(XX')^{-1}$ についてまとめ、さらに、右から l_m を乗ずると、(2-5) 式の第2項が求められ、

(2-6) $$l_m\lambda'(XX')^{-1}=(l_ml_n'-l_ml_m'\hat{W})/m$$

となる。(2-6) 式を (2-5) 式に代入して、

(2-7) $$\tilde{W}_0=l_ml_n'/m+(I_m-l_ml_m'/m)\hat{W}$$

が求められる。

2-2 要素の1個が0である制約条件

商品分類の対応関係において商品グループ内に対応関係がない状態、すなわち0となる配分ウエイトが存在するのが一般的である。すべてに対応していると仮定された配分ウエイト行列 W に対して、ウエイトとゼロ制約条件付きの最小2乗法はウエイト条件の (1-3) 式に付け加えて対応関係がない配分ウエイトの $\omega_{ij}=0$ をゼロ制約条件として (1-4) 式における U の最小2乗法を利用して W の推定量を求める方法である。行と列を適当に入れ替えることによって任意の ω_{ij} を ω_{11} へと移動できるため、配分ウエイトにおけるゼロ制約が1個あるとして、$\omega_{11}=0$ とおいても一般性を失わない。したがって、ゼロ制約を、

$$\omega_{11}=e_1(m)'We_1(n)=0$$

とする。$\lambda'=(\lambda_1\cdots\lambda_n)$ を n 次ベクトル、ξ_1 をスカラーとすれば、この最小2乗法による解は、

(2-8) $$s_3=tr(UU')-(l_m'W-l_n')2\lambda \\ -e_1(m)'We_1(n)2\xi_1$$

において、(2-8) 式の s_3 を行列 W の要素で偏微分して0と置いたときの解として得られる。この解を $\tilde{W}$ とする。スカラーである (2-8) 式に対して、$\partial s_3/\partial W=0$ より、

$$\tilde{W}=\hat{W}+l_m\lambda'(XX')^{-1}+\xi_1e_1(m)e_1(n)'(XX')^{-1}$$

となる。

(2-9) $$B=\xi_1e_1(m)e_1(n)'=\begin{pmatrix}\xi_1 & o' \\ o & O\end{pmatrix}$$

とおけば、

(2-10) $$\tilde{W}=\hat{W}+l_m\lambda'(XX')^{-1}+B(XX')^{-1}$$

となる。$\partial s_3/\partial\lambda=0$ より、$l_m'\tilde{W}=l_n'$ となる。(2-10) 式に対して左から l_ml_m' を乗じれば、

$$l_ml_n'=l_ml_m'\hat{W}+ml_m\lambda'(XX')^{-1} \\ +l_ml_m'B(XX')^{-1}$$

となり、(2-10)式の第2項である、

$$l_m\lambda'(XX')^{-1}=\{l_m l_n'-l_m l_m'(\hat{W}+B(XX')^{-1})\}/m \tag{2-11}$$

が得られる。(2-11)式を(2-10)式に代入した結果に(2-7)式の$\widetilde{W}_0$を利用すれば、

$$\begin{aligned}\widetilde{W}&=l_m l_n'/m+(I_m-l_m l_m'/m)(\hat{W}+B(XX')^{-1})\\&=\widetilde{W}_0+(I_m-l_m l_m/m)B(XX')^{-1}\end{aligned} \tag{2-12}$$

が得られる。したがって、$\widetilde{W}_0$は確定された値であり、Bが決まれば(2-12)式から$\widetilde{W}$が求められるので本節の課題はBをいかにして求めるかということになる。Bは、

$$(mI_m-l_m l_m')B(XX')^{-1}=m\widetilde{W}-l_m l_n'-(mI_m-l_m l_m')\hat{W} \tag{2-13}$$

として表わされる。また、$\partial s_3/\partial\xi_1=0$から$e_1(m)'\widetilde{W}e_1(n)=0$となる。(2-13)式に対して左から$e_1(m)'$、右から$e_1(n)$を乗じれば、

$$(me_1(m)'-l_m')B\begin{pmatrix}c_{11}\\C_{21}\end{pmatrix}=-1-(me_1(m)-l_m')\begin{pmatrix}g_{11}\\G_{21}\end{pmatrix} \tag{2-14}$$

となる。ここで、

$$(XX')^{-1}=\begin{pmatrix}c_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{pmatrix},\ \hat{W}=\begin{pmatrix}g_{11}&G_{12}\\G_{21}&G_{22}\end{pmatrix}$$

としている。これをξ_1について解けば、

$$\xi_1=\{(m-1)c_{11}\}^{-1}(-mg_{11}-1+g_{\bullet 1}) \tag{2-15}$$

となる。この得られたξ_1を利用すれば、(2-9)式からBが得られるため(2-12)式から$\widetilde{W}$が求められる。ここで重要なことは、$\widetilde{W}$のゼロ制約の位置と B におけるξ_1の位置は一致していることである。すなわち、$e_1(m)'\widetilde{W}e_1(n)=0$と$e_1(m)'Be_1(n)=\xi_1$が対応していることであり、$B$における$\xi_1$の位置がは$\widetilde{W}$のゼロ制約の位置である。

2.3 要素の2個が0である制約条件

配分ウエイトのゼロ制約を 2 個とする。$\omega_{11}=0$と$\omega_{21}=0$、$\omega_{11}=0$と$\omega_{12}=0$、$\omega_{11}=0$と$\omega_{22}=0$の 3 つの場合についてそれぞれ制約条件付きの最小2乗法による解を求める。それ以外のゼロ制約の組み合わせは行と列を適当に入れ替えることでこの3つの場合に適合させることができる。

配分ウエイト行列のゼロ制約を$\omega_{11}=0$と$\omega_{21}=0$として、$\lambda'=(\lambda_1\cdots\lambda_n)$、$\xi'=(\xi_1\quad\xi_2)$とする。この制約条件付き最小2乗法の解は、

$$\begin{aligned}s_4&=tr(UU')-(l_m'W-l_n')2\lambda\\&-e_1(m)'We_1(n)2\xi_1\\&-e_2(m)'We_1(n)2\xi_2\end{aligned} \tag{2-16}$$

として、(2-16)式を行列 W の要素で偏微分して0と置いたときの解であり、これを$\widetilde{W}$とする。スカラーである(2-16)式に対する行列Wの偏微分の結果は$\partial s_4/\partial W=0$より、(2-12)式が得られる。ただし、

$$\begin{aligned}B&=\xi_1e_1(m)e_1(n)'+\xi_2e_2(m)e_1(n)'\\&=\begin{pmatrix}\xi&o'\\o&O\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2-17}$$

である。$\partial s_4/\partial\xi_1=0$から$e_1(m)'\widetilde{W}e_1(n)=0$、$\partial s_4/\partial\xi_2=0$から$e_2(m)'\widetilde{W}e_1(n)=0$となり、

$$\begin{pmatrix}e_1(m)'\\e_2(m)'\end{pmatrix}\widetilde{W}e_1(n)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

となる。Bとの関係を考慮すれば、

$$\begin{pmatrix}e_1(m)'\\e_2(m)'\end{pmatrix}Be_1(n)=\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}=\xi$$

となり、$\widetilde{W}$の0とBにおけるξ_1とξ_2の位置は一致している。(2-13)式の左から$(e_1(m)\quad e_2(m))'$、右から$e_1(n)$を乗ずると、

$$\begin{pmatrix}e_1(m)'\\e_2(m)'\end{pmatrix}(mI_m-l_m l_m')B(XX')^{-1}e_1(n)$$

$$=\begin{pmatrix}e_1(m)'\\e_2(m)'\end{pmatrix}\{-l_m l_n'-(mI_m-l_m l_m')\hat{W}\}e_1(n)$$

となり、これをまとめて、

$$(mI_2-l_2l_2')\xi c_{11}=-l_2-\{m(I_2\quad O_{m-2})-l_{2m}l_m'\}\hat{W}e_1(n)$$

となる。これをξについて解けば、

(2-18)
$$\xi = \left(c_{11} \begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ -1 & m-1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \left(-l_2 - m \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{\bullet 1} \\ g_{\bullet 1} \end{pmatrix} \right)$$

となる。この得られたξを利用すれば、(2-17) 式からBが得られるため (2-12) 式から$\widetilde{W}$が求められる。

配分ウエイトのゼロ制約を2個とするときの残りのゼロ制約である$\omega_{11}=0$と$\omega_{12}=0$、$\omega_{11}=0$と$\omega_{22}=0$の場合についても同じようにして制約条件付きの最小2乗法による解を求めることができる(注1)。

2.4 要素に対する一般的なゼロ制約条件

配分ウエイトのゼロ制約による解をもう少し一般的な方法で示す。(2-3) 式により、$(i,j)\in S_2$に対して$\omega_{ij}=0$である。配分ウエイトのゼロ制約を複数個としたときのウエイト制約条件付き最小2乗法は、

$$s_5 = tr(UU') - (l_m' W - l_n')2\lambda - \sum_{(i,j)\in S_2} e_i(m)' W e_j(n) 2\xi_{ij}$$

としたときに得られる解の$\widetilde{W}$であり、(2-12) 式で示される。前節と同じように複数個のゼロ制約を構成する行列を、

(2-19)
$$B = \sum_{(i,j)\in S_2} e_i(m) e_j(n)' \xi_{ij}$$

とする。Bは$(i,j)\in S_2$に対して$\xi_{ij}\neq 0$、それ以外は0となる行列である。Wのゼロ制約$\omega_{ij}=0$の位置とBにおける$\xi_{ij}\neq 0$の位置は一致している。また、$(i,j)\in S_2$に対して

(2-20)
$$e_i(m)' \widetilde{W} e_j(n) = 0$$

を満足する。繰り返し述べているように、$\widetilde{W}_0$は確定された値であるため、行列Bが求められれば (2-12) 式から$\widetilde{W}$が得られるので、本節の課題も (2-19) 式のBをいかにして求めるかということになる。(2-12) 式の右辺において、

$\hat{W}=G$、$(XX')^{-1}=C$、

$$mI_m - l_m l_{m'} = \begin{pmatrix} m-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & m-1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & m-1 \end{pmatrix} = A$$

とし、また、

$$B = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \\ \xi_{m1} & \cdots & \xi_{mn} \end{pmatrix}$$

とする。(2-12) 式は、

(2-21)
$$\widetilde{W} = (l_m l_n' + A(G+BC))/m$$

となる。(2-21) 式においてB以外は既知の値であるので、以下においてBを求める方法を示す。

(2-13) 式の右辺を、$H = m\widetilde{W} - l_m l_n' - AG$とすれば、(2-13) 式は、

(2-22)
$$ABC = H$$

と表わされる。$N=mn$とおき、N個のBの要素を$\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{mn}$の順にベクトルで表わし、

(2-23)
$$\xi' = (\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_N)$$

とし、Hの要素も同じようにしてベクトルhとすれば、(2-22) 式は、

(2-24)
$$A\otimes C'\xi = h$$

となる。ここで、$\otimes$は行列演算におけるクロネッカーの積を表わし、

$$A\otimes C' = \begin{pmatrix} a_{11}C' & \cdots & a_{1n}C' \\ \vdots & & \\ a_{m1}C' & \cdots & a_{mn}C' \end{pmatrix}$$

である(注2)。$(b_1 \quad \cdots \quad b_m)' = \xi'$なので、これらをまとめて (2-24) 式が示される。

$$S_\xi = \{n(i-1)+j \mid (i,j)\in S_2\}$$

とするとき、ベクトルξにおいて$\xi_i\neq 0, i\in S_\xi$の解を求める。$\xi[S_\xi]$を$\xi_{ij}\neq 0$のみから取り出されたベクトルとする。$A\otimes C'$から$i\in S_\xi$となるi行とi列以外を同時に取り除いた行列を$A\otimes C'[S_\xi]$、同じくhからh_i以外を取り除いて作られたベクトルを$h[S_\xi]$とする。Hの (i,j) 要素であるh_{ij}は、

$$h_{ij} = e_i(m)'He_j(n)$$

(2-25) $= e_i(m)'\widetilde{W}e_j(n) - e_i(m)'\{l_m l_m' + A\hat{W}\}$
$e_j(n)$

となり、$(i, j) \in S_2$ のとき（2-21）式から（2-25）式の右辺の第 1 項は 0 となる。したがって、$\xi[S_\xi\}$ の解は、

(2-26) $\xi[S_\xi] = \{A \otimes C'[S_\xi]\}^{-1} h[S_\xi]$

として求められる。(2-19) 式において $\xi[S_\xi]$ を順に 0 ではない ξ_{ij} と置き換えることで B が得られる。したがって、この B により（2-21）式から求める $\widetilde{W}$ が得られる。

2.5 既知値を考慮したウエイトの制約条件付き最小 2 乗法

一般的なゼロ制約条件をもとにした配分ウエイト行列 W の推計方法では $\omega_{ij} = 1$ が既知である j 行についても未知の値として解いている。推計する W のパラメターの数をできるだけ少なくするには既知である j 列を取り除くことで可能となる。すなわち、ゼロ制約条件ではなく既知の値である 0 と 1 を制約条件と拡張することである。配分ウエイト行列 W に対する関数 $a(W)$ を $\omega_{ij} \neq 0$ のとき 1 となるようにする。

$$l_m' a(W) = \begin{pmatrix} a_{\bullet 1} & \cdots & a_{\bullet n} \end{pmatrix}$$

において、$a_{\bullet j} = 1$ のとき、j 列には $\omega_{ij} \neq 0$ となる要素が 1 個しかないため、ウエイト条件から $\omega_{ij} = 1$ となる。W を $a_{\bullet j} \neq 1$ となる W^* と $a_{\bullet j} = 1$ となる W^{**} に分割するため、直交行列である Q を利用する。すなわち、

$$W^* = WQ^*, \quad W^{**} = WQ^{**}$$

に対して、$Q = (Q^* \quad Q^{**})$ とする。$QQ' = I_n$ である。(1-4) 式は、

$$Y = WQQ'X + U = W^*X^* + W^{**}X^{**} + U$$

となる。ここで、$Q^{*\prime}X = X^*$、$Q^{**\prime}X = X^{**}$ である。$Y^* = Y - W^{**}X^{**}$ とすれば、

(2-27) $Y^* = W^*X^* + U$

となり、W^* が $m \times n^*$ 行列になったとすれば、（1-3）式のウエイト条件は、

(2-28) $l_m'W^* = l_{n^*}$

となる。したがって、(2-28) 式を（1-3）式、(2-27) 式を（1-4）式と置き換えることにより最小 2 乗法による解は（2-21）式より求めらることができる。

3．分割表にもとづく配分ウエイト行列の推計

商品グループ内における分類 A と B の取引額は商品分類の改訂前後においてそれぞれ得られた無作為標本であり、この標本は同一期間から得られた無作為標本と同一であるという仮説のもとで、分類 A から B の方向に対する配分額は表 2 に示されている。この表において分類 B における取引額の構成比は、$i = 1 \cdots m$ に対して $y_i = (y_{i1} \cdots y_{ik})'$、同じように分類 A の取引額の構成比は $j = 1 \cdots n$ に対して $x_j = (x_{j1} \cdots x_{jk})'$ として共にベクトルで表わされている。これをスカラー表示で表わすため、配分ウエイトの構造を表わす（1-6）式において、U=0 とおき、両辺に右から l_k を乗じて k で除せば、$Yl_k / k = WXl_k / k$ となるので、

(3-1) $(\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_m)' = W(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n)' = WD(\bar{x})l_n$

が得られる。$\bar{y}' = (\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_m)$ とする。適当な数を Q とするとき、(3-1) 式の右辺の $WD(\bar{x})$ に Q を乗じて、

(3-2) $V = WD(\bar{x})Q$

として、V のそれぞれの要素が整数であるとするとき、(3-2) 式は $\bar{x}$ で表わされた配分額行列である。V の列および行におけるそれぞれの周辺和は、

(3-3) $l_m'V = \bar{x}'Q, \quad Vl_n = \bar{y}Q$

となり、V の総和は、

(3-4) $l_m'Vl_n = \bar{x}'l_nQ = l_m'\bar{y}Q = Q$

である。

配分額行列 V を分類 A と B に対する 2 次元分割表として、V のそれぞれの要素を確率分布に

従って分布する確率変数としたとき、一般的にはVは同時確率関数は多項分布に従って分布する分割表と想定できる。確率変数を$i=1\cdots m$、$j=1\cdots n$に対してV_{ij}、その実現値をv_{ij}として、確率変数V_{ij}がその実現値をv_{ij}となる確率を、$P\{V_{ij}=v_{ij}\}=p_{ij}$とすれば、同時確率関数は、

$$
\begin{aligned}
&f(V_{11}=v_{11}\cdots V_{mn}=v_{mn};p_{11}\cdots p_{mn})\\
&=Q!(\prod_{ij} v_{ij}!)^{-1}\prod_{ij} p_{ij}{}^{v_{ij}}
\end{aligned}
$$

と表わすことができる。もちろん、$p_{\bullet\bullet}=1$である。取引額行列の実現値が得られたときの対数尤度関数の$\ell(p_{11}\cdots p_{mn})=\log f$は$a$を$p_{ij}$に無関係な定数項として、

(3-5) $$\ell(p_{11}\cdots p_{mn})=a+\sum_{ij} v_{ij}\log p_{ij}$$

となる。また、Vの総額Qは確定しているので、

(3-6) $$v_{ij}=p_{ij}Q=p_{\bullet j}p_{i|j}Q$$

としてそれぞれの要素である取引額を表わすことができる。$p_{\bullet j}$は分類Aにおける周辺確率のa_j、$p_{i|j}$は分類Aのa_jの確率が知られているときの分類Bのb_iの条件付確率である。

3.1 分類間の独立性を仮定した同一配分パターン方式

分類AとBが互いに独立と仮定される分割表に対する配分額行列の推計が配分ウエイト行列における分類間の独立性を仮定した同一配分パターンの方式である。最初は、分類AとBの商品グループ内において両分類の個別分類コード間の対応関係がないものも無視してすべてに対応関係があるとする。分類Bにおけるb_iの周辺確率を$p_{i\bullet}$とすれば、同時確率が独立であるときには(3-6)式において、$p_{i|j}=p_{i\bullet}$となるため、v_{ij}は、

$$v_{ij}=p_{ij}Q=p_{\bullet j}p_{i\bullet}Q$$

と表わすことができる。したがって、p_{ij}を要素とする同時確率の行列をPとすれば、$P=(p_{1\bullet}\cdots p_{m\bullet})'(p_{\bullet 1}\cdots p_{\bullet n})$なので、

(3-7) $$P=D(Pl_n)l_m l_n' D(l_m' P)$$

となる。このPを利用してv_{ij}を行列表示すれば、

(3-8) $$V=D(Pl_n)l_m l_n' D(l_m' P)Q$$

が得られる。Vが与えられているときには(3-2)式と(3-3)式からWを計算することができる。配分ウエイト行列は、

(3-9)
$$
\begin{aligned}
W&=V\{D(\bar{x})Q\}^{-1}=V\{D(l_m' V)Q\}^{-1}\\
&=D(Pl_n)l_m l_n'\\
&=\begin{pmatrix} p_{1\bullet}\\ \vdots \\ p_{m\bullet}\end{pmatrix}(1\ 1\cdots 1)
\end{aligned}
$$

となり、分類Bにおける周辺分布のみから求めることができる。しかも、分類Aに相当する列に対しては同じようにBの周辺確率が適用される。このことが分類間の独立性を仮定した推計方法に対して同一配分パターンと呼ばれる根拠となっている。

配分額行列には多項分布が想定されるときには最尤推定量にもとづいて(3-7)式を具体化することが可能である。分類AとBが互いに独立であるとき、(3-4)式の尤度関数を最大にする解である$\hat{p}_{i\bullet}$と$\hat{p}_{\bullet j}$がそれぞれ$p_{i\bullet}$と$p_{\bullet j}$に対する最尤推定量である。周辺確率の$p_{i\bullet}$と$p_{\bullet j}$にはそれぞれの和を取れば1となる性質があるので、

$$\sum_{i=1}^{m} p_{i\bullet}=1,\quad \sum_{j=1}^{n} p_{\bullet j}=1$$

を制約条件とするラグランジェ関数は、

$$
\begin{aligned}
s=&\ \ell(p_{1\bullet}\cdots p_{m\bullet},p_{\bullet 1}\cdots p_{\bullet n})+\mu\left(\sum_{i} p_{i\bullet}-1\right)\\
&+\eta\left(\sum_{j} p_{\bullet j}-1\right)
\end{aligned}
$$

と表される。$\partial s/\partial p_{i\bullet}=0$と$\partial s/\partial p_{\bullet j}=0$を解いて、(3-4)式から、$v_{\bullet\bullet}=Q$なので、最尤推定量は、

(3-10) $$\hat{p}_{i\bullet}=v_{i\bullet}/Q,\quad \hat{p}_{\bullet j}=v_{\bullet j}/Q$$

として求められる。(3-10) 式の左の式は (3-3) 式から、$\hat{P}l_n = Vl_n / Q = \bar{y}$ であり、同じようにして (3-10) 式の右の式は $l_m' \hat{P} = l_m' V / Q = \bar{x}$ となる。したがって、(3-8) 式の取引額行列の最尤推定量は、

(3-11) $$\hat{V} = D(\bar{y}) l_m l_n' D(\bar{x}) Q$$

となる。(3-9) 式の配分ウエイト行列の最尤推定量は、

(3-12)
$$\begin{aligned}\hat{W} &= \hat{V}\{D(\bar{x})Q\}^{-1} = \hat{V}\{D(l_m'\hat{V})Q\}^{-1} \\ &= D(\bar{y}) l_m l_n' \\ &= \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{pmatrix} (1\ 1 \cdots 1)\end{aligned}$$

となる。すなわち、分類間の独立性を仮定した同一配分パターンによる推計方法は Y のみに依存し X とは無関係となる。配分ウエイト行列のウエイト条件は、(3-12) 式に右から l_m' を乗ずれば、

$$l_m' \hat{W} = (l_m' D(\bar{y}) l_m) l_n' = l_n'$$

となることにより確かめられる。

一般に配分ウエイト行列には 0 となる要素が存在するため、一般的な配分ウエイト行列を W_g とする。配分ウエイト行列の要素が 0 以外のときに 1 に置き換る関数を $a(\,)$ とする。$a(\,)$ は次のように解釈される。2 次元の自然数から構成される集合を、$S = \{(i, j) \mid i = 1 \cdots m,\ j = 1 \cdots n\}$ とし、$(i, j) \in S$ に対して $\omega_{ij} = 0$ となる任意の部分集合を S_2 とする。配分ウエイト行列 W における 0 となる要素は、

(3-13) $$S_2 = \{(i, j) \mid \omega_{ij} = 0\}$$

と表わすことができる。m 次ベクトルで i 番目の要素が 1 で残りのすべてが 0 となるものを $e_i(m)$ とすれば、

$$a(W_g) = \sum_{(i,j) \in \{S - S_2\}} e_i(m) e_j(n)'$$

となる。配分ウエイト行列作成のためのつぎの処理は $a(W_g)$ を利用して対応関係のないところを調整することである。

$$\begin{aligned}W_2 &= D(\bar{y}) a(W) \\ &= \sum_{(i,j) \in \{S - S_2\}} D(\bar{y}) e_i(m) e_j(n)'\end{aligned}$$

とおき、ウエイトの条件を満たすように作り直せば、

(3-14) $$W_i = W_2 \cdot D(l_m' W_2)^{-1}$$

として得られる。分類間の独立性を仮定した同一配分パターンを持つ配分ウエイト行列の推計方法を簡単に i 方式という。

3.2　推計方式 i の特殊解としての u 方式

UN 作成の Website による on-line 検索から得られる UN Comtrade Database 貿易データでは商品分類改訂後の新商品分類コードから旧商品分類コードへの変換がおこなわれており、旧商品分類による貿易データの長期時系列的な利用を可能にしている。UN が採用している新商品分類コードから旧商品分類コードへの変換方法には新旧商品分類コードに基づく対応関係コード表、すなわち、対応関係の概念的基本モデルがそのまま利用されているのではなく、この対応表とは別に変換のために用意された対応表が利用されている。UN から入手したこの変換のための対応表は SITC 系列と HS 系列を含めて新商品分類から旧商品分類のすべての組合せの 15 種類が存在する (注3)。この変換表は新商品分類コードが旧商品分類コードの複数個に対応しているときにはその中から最適と思われるものを選択するという方法を採用している。すなわち、新旧商品分類コードにもとづく対応表において配分構造が生じている場合には取引額を考慮せずに商品分類の例示品目を利用して関連の多い分類コードの 1 つに対応させ、それ以外は無視するという方法である。しかも、注意すべきことは報告国ごとに選択するのではなくすべての報告国に対して一律に同一の対応表を適用していることである。

分類間の独立を仮定している i 方式において推計された最大の配分ウエイトを 1、それ以外を 0 とおけば配分構造を考慮していないという意味では形式的に UN の採用している変換方式と一致する。この推計方法をアジア経済研究所における u 方式という。u 方式は報告国、輸出入区分ごとの取引額を考慮しているのに対して、UN の方法ではそれを明示的に考慮しておらず、しかもすべての報告国に対して一律に適用されているところに違いがある。

3.3　初期条件付エントロピー最適化

分割表を近似する確率分布モデルがいくつか想定されるとき、実現値を生成する真の確率分布に対してモデルによって既定された確率分布の近似は Kullback-Leibler 情報量（K-L 情報量）によって評価することができる。K-L 情報量の符号を逆転させた値は負のエントロピーであり、この値が大きい程、同じことであるが、K-L 情報量が小さいほど近似の程度が良いとして評価される。この方法はエントロピー最適化法と言われ、この繰り返しによる逐次解の代替法として広く利用されているのが RAS 法あるいは比例反復法（Iterative Scaling Procedire: ISP）である。

ある条件のもとで配分額行列の初期値 $V^{(0)}$ は知られているものとして、推計したい取引額行列を V とする。この配分額行列 V の周辺和は行に対して $l_m'V = \bar{x}'$ であり、同時に列に対しても $Vl_n = \bar{y}$ となる条件を満足するとき、V はこの条件の下で目的関数を K-L 情報量、すなわち負のエントロピーで定義するときの最適解の $\hat{V}$ として求めることができる。推計したい配分ウエイト行列 $\hat{W}$ は推計された配分額行列 $\hat{V}$ が得られれば、(3-2) 式から計算できる。

配分額行列の初期値と周辺和の条件のもとでエントロピーを最適化するためのラグランジェ関数は、$i = 1 \cdots m$ および $j = 1 \cdots n$ に対して、

$$s = \sum_i^m \sum_j^n v_{ij} (\log v_{ij} / v_{ij}{}^{(0)} - 1) + \sum_i^m \mu_i \left(\bar{y}_i - \sum_j^n v_{ij} \right) + \sum_i^m \eta_j \left(\bar{x}_j - \sum_i^m v_{ij} \right) \quad (3\text{-}15)$$

となる。エントロピーを定義している（3-15）式において、$v_{ij} \log v_{ij}$ ではなく、$v_{ij} (\log v_{ij} - 1)$ としているのは v_{ij} で偏微分したときの結果に定数が残らないようにするためである。(3-15) 式を v_{ij} で偏微分した結果を 0 とおけば、$\log v_{ij} = \log v_{ij}(0) - \mu_i - \eta_j$ となるので、

$$v_{ij} = e^{-\mu_i} v_{ij}^{(0)} e^{-\eta_j} = \xi_i v_{ij}^{(0)} \zeta_j \quad (3\text{-}16)$$

となる。ここで、

$$\xi_i = e^{-\mu_i}, \ \varsigma_j = e^{-\eta_j}$$

である。$\xi' = (\xi_1 \cdots \xi_m)$ と $\zeta' = (\zeta_1 \cdots \zeta_n)$ とすれば、(3-16) 式を行列表示して、

$$V = \begin{pmatrix} \xi_1 v_{11}{}^{(0)} \varsigma_1 & \cdots & \xi_1 v_{1n}{}^{(0)} \varsigma_n \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_m v_{m1}{}^{(0)} \varsigma_1 & \cdots & \xi_m v_{ij}{}^{(0)} \varsigma_n \end{pmatrix} = D(\xi) V^{(0)} D(\varsigma) \quad (3\text{-}17)$$

となる。$\partial s / \partial \mu = 0$ と $\partial s / \partial \eta = 0$ からそれぞれ、$D(\xi) V^{(0)} D(\varsigma) l = \bar{y}$ と $l' D(\xi) V^{(0)} D(\varsigma) = \bar{x}'$ が求められる。前者のベクトルを対角行列に置き換えれば、$D\{D(\xi) V^{(0)} D(\varsigma) l\} = D(\bar{y})$ となり、

$$D(\xi) D\{V^{(0)} \varsigma\} = D(\bar{y}) \quad (3\text{-}18)$$

となる。$D\{V^{(0)} \varsigma\}$ が正則行列であれば逆行列が存在し、$D(\xi) = D(\bar{y}) D\{V^{(0)} \varsigma\}^{-1}$ となる。この式の $D(\bar{y})$ と $D\{V^{(0)} \varsigma\}^{-1}$ を入れ替え、さらに右から l_n を乗ずれば、

$$\xi = D\{V^{(0)} \varsigma\}^{-1} \bar{y} \quad (3\text{-}19)$$

が得られる。後者から同じようにして、

$$\varsigma = D\{V^{(0)}{}' \xi\}^{-1} \bar{x} \quad (3\text{-}20)$$

が得られ、(3-19) 式と (3-20) 式の関係を利用して逐次解を求めることができる。

正の実数を要素として持つ任意の $m \times n$ 行列を$V^{(k)}$ とする。$k = 0,1,2,\cdots$ である。初期値として$\xi_0 = l_m$ 、$V^{(0)}$ として、$k = 1 \cdots n$ に対して繰り返しが行われ、$k = 1$ として、

(3-21) $\varsigma_k = D\{V^{(0)}{}'\xi_{k-1}\}^{-1}\bar{x}$

(3-22) $\xi_k = D\{V^{(0)}\varsigma_k\}^{-1}\bar{y}$

を 1 組として計算する。k を 1 つずつ増やしながら繰り返し計算を続け、$l_m{}'|\xi_{k+1} - \xi_k|$ がある値より小さくなったところで収束したとして計算を終了する。推計したい配分額行列はこのときの k に対して（3-21）式と（3-22）式を（3-17）式に代入して、

(3-23) $V^{(k)} = D(\xi_k)V^{(0)}D(\varsigma_k)$

として求めることができる。(3-23) 式の解の収束と一意性は RAS 法との同一性で確かめられる。配分ウエイト行列は（3-2）式から$W = V^{(k)}\{D(\bar{x})Q\}^{-1}$ として得られ、このようにして初期条件付きのエントロピー最適化により求める方法を e 方式という。

エントロピー最適化法の代替として利用できる RAS 法は SAM（Social Accounting Matrix）や産業連関表作成等でバランス調整に頻繁に利用される比例反復の繰り返し計算により解を求める方法である。初期値を$V^{(0)}$ として、$k = 1 \cdots n$ に対して、

(3-24) $V^{(2k-1)} = V^{(2k-2)}D(l_m{}'V^{(2k-2)})^{-1}D(\bar{x})$

(3-25) $V^{(2k)} = D(\bar{y})D(V^{(2k-1)}l_n)^{-1}V^{(2k-1)}$

となるように、(3-24) 式および（3-25）式を 1 組として繰り返すことでおこなわれる。この繰り返しにより k をできるだけ大きくすれば、$V^{(k)} \to V$ となり一意的に収束する。配分ウエイト行列は（3-23）式あるいは（3-24）式の取引額表を（3-2）式により $Q = 1$ として計算して求めることができる。

3.4 初期条件なしのエントロピー最適化

取引額を考慮せずに対応関係の配分構造のみから推計する方法の 1 つに単純均等配分法がある。単純均等配分法はエントロピー最適化の特殊解として解釈できる。配分額行列の初期値は知られていないものとして、配分ウエイト行列において（1-3）式のウエイト条件のみが成り立つとする。

最初は、商品グループ内の対応関係がすべて存在するとする。知られていない取引額行列に対して、$V^{(0)} = l_m l_n{}'$ 、$\bar{x} = l_n$ とする。配分額行列は$V = WD(l_n) = W$ となり、配分ウエイト行列に一致する。エントロピー最適化法を利用するためのラグランジェ関数は$V = W$ とすれば、$i = 1 \cdots m$ および $j = 1 \cdots n$ に対して、

(3-26)
$$s = \sum_i^m \sum_j^n \omega_{ij}(\log\omega_{ij} - 1) + \sum_j^n \eta_j\left(1 - \sum_i^m \omega_{ij}\right)$$

となる。(3-26) 式を ω_{ij} で偏微分した結果を 0 とおけば、$\log\omega_{ij} = -\eta_j$ となるので、(3-16) 式より、

(3-27) $\omega_{ij} = e^{-\eta_j} = \zeta_j$

となり、この式を行列表示して、$W = l_m l_n{}'D(\zeta)$ となる。$\partial s / \partial\eta = 0$ から、

$$l_m{}'W = ml_n{}'D(\varsigma) = m\varsigma' = l_n{}'$$

となり、$\varsigma = l_n / m$ が求められる。すなわち、

(3-28) $W = l_m l_n{}' / m$

となる。(3-28) 式は取引額を考慮しない単純均等配分の方法においてすべての要素が $\omega_{ij} \neq 0$ であるときの配分ウエイト行列と一致するのを確かめることができる (注4)。

一般的な配分ウエイト行列において、商品グループの対応関係に $\omega_{ij} = 0$ が存在するときの処理は$a(W)$ を利用して対応関係のないところを調整することである。

$$W_2 = D(l_m)a(W)/m$$

とおき、ウエイトの条件を満たすように作り直す。単純均等配分の配分ウエイト行列は、

(3-29) $$W_s = W_2 \cdot D(l_m{}' W_2)^{-1}$$

として得られる。この方法を s 方式という。

4．推定方法の違いによる配分ウエイト行列の特徴

推定方法の違いにより推定された配分ウエイト行列にどのような特徴が現れるかを確かめるのが本節である。分類 A の取引額の構成比 X が得られ、同時に一般的な配分ウエイト行列 W_g の真の値が知られているときにはウエイト条件である（1-5）式のもとで配分ウエイトの構造を表わす（1-6）式を利用して分類 B の取引額の構成比 Y を推計できる。以下、煩雑さを避けるため、W_g を W とする。したがって、（1-6）式において U に誤差を与えて Y を作成することで、逆に得られた X と Y から W を推計することができる。W の値は既に知られているのでこれを基準として誤差の大きさの変化に対する異なる推定方式による W の精度を確かめることができる。

推計方法は、(1) 取引額を考慮せずに対応関係のみから推計する単純均等配分方式を s、(2) 分類間に独立性を仮定した同一配分パターンの方式を i、(3) i 方式の特殊解として最大値を 1、それ以外を 0 とおいた UN 準拠方式の u、(4) 等号制約条件付き最小 2 乗法により直接配分ウエイト行列を求める方法を wm、の 4 つを比較の対象とする。また、(1) と (4) により求めた配分ウエイト行列を初期値とするエントロピー最適化法による負の調整および最終調整がそれぞれ $s2$,$wm2$ である (注5)。

4.1 配分ウエイト行列の推計の準備

配分ウエイト行列を簡単のためにその大きさを m=6、n=5 とする。分類 A において個別分類コード $a_1 \cdots a_6$ に対応する統計値である取引額 X^D が表 3 のように表わされているとする。表 3 の取引額は UN Comtrade Database 貿易データの報告国の日本を想定すれば SITC-R2 の 1976 年から 1987 年に対応する 12 年間を一連番号の $k = 1 \cdots 12$ とおいて、6×12 行列の X^D の要素を x_{ij} 、E は撹乱項として、

(4-1) $$X^D = x^{(0)} l_{12}{}' + 4 l_5 l_{12}{}' T^2 + E$$

として作成されている。ここで、

$$x^{(0)}{}' = (4255, 2257, 2371, 1718, 1965, 1589)$$

は初期値となる 6 次のベクトルである。(4-1) 式の右辺の第 2 項目は対角行列 T の、

$$T = D(3,4,\cdots k+3,\cdots 15)$$

を含み、年 k に対する 2 次のトレンド、同じく第 3 項目の E はすべての要素が互いに独立な標準正規分布の 300 倍をそれぞれ表わしている。真の配分ウエイト行列 W として分類 A における個別分類コード a_1 を分類 B の b_1, b_2, b_3 に対する配分ウエイトとして、

$$\omega_{11} = 0.5,\ \omega_{21} = 0.2,\ \omega_{31} = 0.3$$

となるように配分する。正確に言えば $\omega_{41} = \omega_{51} = 0$ を含んでいるが簡単のために省略する。このウエイトを合計すると 1 となるのでウエイト条件は満たされている。個別分類コード a_2 を b_1, b_2, b_4 に対する配分ウエイトとして、$\omega_{12} = 0.4$ 、$\omega_{22} = 0.5$ 、$\omega_{42} = 0.1$ 、と配分する。個別分類コード a_3 を b_3, b_4 に対する配分ウエイトとして $\omega_{33} = 0.7$, $\omega_{43} = 0.3$ と配分する。個別分類コード a_4 は b_3, b_4, b_5 に対して配分ウエイトを、$\omega_{34} = 0.6$ 、$\omega_{44} = 0.3$ 、$\omega_{54} = 0.1$ 、と配分する。個別分類コード a_5 は b_4, b_5 に対して配分ウエイトを、$\omega_{45} = 0.6$ 、$\omega_{55} = 0.4$ 、と配分する。これらのウエイトを合計すると 1 となるのでウエイト条件は満たされている。

分類 B における取引額 Y は、$N = 1 \cdots 50$ を与えたときに $Y(N)$ で表わされ、(1-4) 式において U の要素に互いに独立な正規分布の 10N 倍を与えた推計値とする。N=0 のときは（1-4）式において撹乱項は O なので W の推計値は真の値と

表３ 分類Aにおける個別分類コード$a_1 \cdots a_6$に対応する統計値の取引額X^D

分類A	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
a_1	4140.6	3933.9	4425.8	4681.0	4639.3	4311.4	4780.8	4167.3	5012.7	5162.2	4744.5	5066.2
a_2	2189.4	1826.3	2636.8	2389.0	2429.1	2908.1	2721.9	2683.1	2963.0	2285.6	2664.2	3115.1
a_3	2132.6	2286.5	2580.4	2590.1	2480.9	2724.9	2767.8	3083.8	2552.3	2665.7	2827.0	3843.0
a_4	1667.4	1656.9	3049.3	2021.0	1951.9	2152.0	1888.7	2270.4	2297.6	2328.4	2623.6	2950.5
a_5	1951.4	1812.7	1936.3	2181.2	2184.4	1909.0	1885.1	2708.0	2404.2	1936.1	2195.4	2521.7
a_6	1596.3	1783.3	2273.7	2132.5	2253.1	2041.1	2348.9	2246.5	2466.0	2307.6	2310.9	3099.3

（出所）著者作成。

（注）分類Aにおける個別分類コードの$a_1 \cdots a_6$の取引額X^Dは（4-1）式に基づいて作成され、小数点以下2桁目で四捨五入。

一致する。Nが大きくなるにつれてUも大きくなり、Wの推計値は真の値から大きく変動するようになる。

4.2 配分ウエイト行列の推計方法

配分ウエイト行列の推計方法は表1で示されているように、分類AからBへの方向に対する対応関係と両者のそれぞれの取引額の構成比XとYを必要とするかどうかにより分類されている。推計方法の（1）である単純均等配分の s 法式にもとづく配分ウエイト行列は（3-29）式より、

$$W_s = a(W)D(l_5{}'a(W))^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{(4-2)}$$

として推計される。この推計方法では対応関係のみが利用されており取引額のXとYは共に考慮されていない。

推計方法の (2) である分類間の独立性を仮定した同一配分パターンの i 方式は（3-14）式により求められ、推計に対して対応関係と同時に取引額の Y のみが考慮されている。i 方式において分類 A における個別分類コードa_1を例にあげれば、$\bar{y}_1 = 0.2784544$、$\bar{y}_2 = 0.1558074$、$\bar{y}_3 = 0.1645216$なので、

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{21} \\ \omega_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{pmatrix} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.465034 \\ 0.260207 \\ 0.274759 \end{pmatrix} \quad \text{(4-3)}$$

となる。

推計方法の（3）である u 方式については、i 方式の特殊解であり、個別分類コードa_1に対して（4-3）式において最大となるω_{11}を 1、それ以外を 0 とおけば、$(\omega_{11}\ \omega_{21}\ \omega_{31}) = (1\ 0\ 0)$となる。推計方法の（4）である制約条件つき最小2乗法の wm 方式は対応関係と取引額のXとYの両方が考慮され（3-21）式から求めることができる。

エントロピー最適化法は初期値となる配分ウエイト行列を$W^{(0)}$とするとき、（3-2）式から初期値の配分額行列を$V^{(0)} = W^{(0)}D(Xl_{12})$として、（3-21）式と（3-22）式の繰り返しで求めることができ、その収束解を（3-23）式に代入して取引額行列のVを計算する。この取引額行列から配分ウエイト行列は (3-2) 式を逆に利用して求めることができる。

エントロピー最適化法を利用した推計値が負のときの調整と最終調整は 4.3 において、エン

トロピー最適化法の初期値として s 方式と i 方式の推計値を利用すると解が一致することは 4.4 において示している。

4.3 推計値が負のときの調整と最終調整

等号制約条件付き最小 2 乗法はウエイトの制約条件として等号を採用しているため、推計値に負の値が計算されるのを制御できないという問題を抱えている。本章では推計された負の値は野田・深尾［11］にもとづき、以下のようにして調整される。

［1］等号制約条件付き最小 2 乗法 wm により推計された配分ウエイト行列の W において負の推定値が含まれてなければこれが最終的な配分ウエイトの推定行列となる。負の推定値が含まれていれば［2］を処理する。

［2］W の中で絶対値が最大となる負の推定値 0 と置き変え、取引額の X,Y を変更せずに［1］を実行する。

［3］この処理を繰り返すことで負の推定値がなくなり、ウエイトの正の制約条件を満足するような配分ウエイト行列が推計できる。

［4］推計前の $a(W)$ において 0 に置き換えられた要素を 0.0001 と置き換える。この置き換えた配分ウエイト行列を W^* とするとき、W^* から得られる配分額行列を初期値としてエントロピー最適化法により最終推計とする。

エントロピー最適化法は初期値となる配分額行列を必要とするが、［4］で置き換えられた行列 W^* を利用して初期値の配分額行列を、$V=W^*D(Xl_{12})$ として求め、この取引額行列から（3-21）式と（3-22）式の繰り返しで求め、その収束解を同じく（3-23）式に代入して取引額行列の V を求めることができる。配分ウエイト行列は（3-2）式を逆に利用して、$W=VD(Xl_{12})^{-1}$ として計算される。

表 4 に推計値の負の値に対して調整をして 0 に置き換えられた配分ウエイトと最終調整をしてウエイトの小さな値に置き換えた例が示されている。N の連番の 12,15,18、… において表 4 の（1）が前者の推計値であり、表 4 の（2）が後者の推計値である。例えば、ω_{42} において N が 12 のときは、(1) では負の値は 0 として推定されるにもかかわらず、これを調整して（2）では 0.00099 となっている。この調整によって ω_{11}、ω_{21}、ω_{31} は（1）において 0.42078、0.22715、0.35207 であったのが (2) では 0.42117、0.22752、0.35131 とわずかではあるがそれぞれ修正されている。

このようにして等号制約条件付き最小 2 乗法の wm に対して負の調整と最終調整をおこなったのが $wm2$ である。同じようにして単純均等配分法の s に最終調整をおこなったのが $s2$ である。なお、s については最終調整のみであり、負の調整は必要ではない。

4.4 最終調整による s と i 方式の一致

エントロピー最適化法による最終調整をおこなうとき、初期値となる配分額行列について s 方式と i 方式を採用すれば両者の解が一致することを示す。

分類 A と B の対応関係において個別分類コードのすべてに対応関係が存在しているとする。すなわち、配分ウエイト行列の要素のすべてが $\omega_{ij}\neq 0$ の場合であり、一般的な配分ウエイト行列 W_g に対して、$a(W_g)=l_m l_n'$ となる。単純均等配分の s 方式による推計された配分ウエイト行列は（3-29）式、分類間の独立性を仮定した i 方式は (3-14) 式から得られる。$g=(g_1 \cdots g_m)$ とおき、配分ウエイト行列を、

(4-4) $$W=D(g)a(W_g)=D(g)l_m l_n'$$

とおけば、前者は $D(g)=I_m/m$、後者は $D(g)=D(\bar{y})$ と対角行列をおくことで共通に表現することができる。(4-4) 式において W がウ

表４ 推計値の負の調整および最終調整による推計値の比較

N	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{12}	ω_{22}	ω_{42}	ω_{34}	ω_{44}	ω_{54}	ω_{45}	ω_{55}
(1) *wm*（等号制約条件付き最小２乗法）											
0	0.50000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.10000	0.60000	0.30000	0.10000	0.60000	0.40000
12	0.42078	0.22715	0.35207	0.55512	0.44488	0.00000	0.67037	0.25250	0.07713	0.58074	0.41926
15	0.44944	0.19214	0.35841	0.48802	0.51198	0.00000	0.50731	0.28342	0.20928	0.73351	0.26649
18	0.49567	0.23338	0.27095	0.42737	0.45790	0.11473	0.64580	0.35420	0.00000	0.49996	0.50004
19	0.36825	0.25811	0.37364	0.63569	0.36431	0.00000	0.37065	0.49308	0.13626	0.57486	0.42514
22	0.40329	0.26111	0.33560	0.58359	0.41641	0.00000	0.67920	0.20034	0.12046	0.57732	0.42268
31	0.58370	0.06253	0.35377	0.29277	0.70723	0.00000	0.40370	0.50302	0.09328	0.57769	0.42231
32	0.66710	0.00229	0.33061	0.09854	0.90146	0.00000	0.54471	0.21975	0.23554	0.77887	0.22113
33	0.47151	0.17619	0.35231	0.46525	0.53475	0.00000	0.38821	0.39182	0.21997	0.75041	0.24955
(2) *wm2*（等号制約条件付き最小２乗法 ＆ エントロピー最適化法）											
0	0.50000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.10000	0.60000	0.30000	0.10000	0.60000	0.40000
12	0.42117	0.22752	0.35131	0.55441	0.44460	0.00099	0.67155	0.25165	0.07681	0.58096	0.41904
15	0.44966	0.19241	0.35793	0.48730	0.51171	0.00100	0.50728	0.28294	0.20978	0.73271	0.26729
18	0.49579	0.23342	0.27079	0.42752	0.45804	0.11444	0.64563	0.35338	0.00099	0.50194	0.49806
19	0.36897	0.25878	0.37225	0.63491	0.36410	0.00099	0.37195	0.49221	0.13584	0.57519	0.42481
22	0.40417	0.26245	0.33338	0.58230	0.41672	0.00098	0.68170	0.19938	0.11892	0.57930	0.42070
31	0.58590	0.06354	0.35056	0.28994	0.70909	0.00096	0.40813	0.50017	0.09170	0.58050	0.41950
32	0.67087	0.00237	0.32676	0.09585	0.90320	0.00094	0.54929	0.21803	0.23268	0.77962	0.22038
33	0.47227	0.17627	0.35146	0.46508	0.53393	0.00099	0.38794	0.39095	0.22111	0.74903	0.25097

（出所）著者作成。

（注）N は誤差の大きさを表わす一連番号であり、N=0･･･49 としている。誤差は（1-6）式において U の要素に互いに独立な標準正規分布の分散の 10N 倍を与えている。分類 A における a_3, a_6 の配分ウエイトの推計値は紙面と都合により省略。

エイト条件を満たすためには、

$$l_m{}'W = (l_m{}'D(g)l_m)l_n{}' = g_{\bullet}l_n{}' = l_n{}'$$

となり、$g_{\bullet} = tr(D(g)) = 1$ が必要である。ウエイト条件については前者は、$tr(I_m / m) = 1$、後者は、$tr(D(\bar{y})l_n) = 1$ となり、共に満足していることがわかる。

取引額の収束にはエントロピー最適化法の代わりに RAS 法を利用する。初期値となる配分額行列 $V^{(0)}$ を、(4-4) 式の W に対して（3-2）式から作成すれば、

$$V^{(0)} = WD(\bar{x}) = D(g)l_m l_n{}'D(\bar{x})$$

となる。この初期値をもとに RAS の繰り返し計算の (3-24) 式から第 1 回目の繰り返し計算は、

$$V^{(1)} = V^{(0)}D(l_m{}'V^{(0)})^{-1}D(\bar{x}) = V^{(0)}$$

となる。

第 2 回目の繰り返し計算は（3-25）式から同じようにして、

$$\begin{aligned} V^{(2)} &= D(\bar{y})D(V^{(1)}l_n)^{-1}V^{(1)} \\ &= D(\bar{y})l_m l_n{}'D(\bar{x}) \end{aligned} \tag{4-5}$$

が求められる。(4-5) 式の $V^{(2)}$ は RAS の繰り返し計算において収束条件である周辺和の、$l_m{}'V^{(2)} = l_n{}'D(\bar{x}) = \bar{x}'$ と $V^{(2)}l_n = D(\bar{y})l_m = \bar{y}$ を満たすため収束する。しかも、$V^{(2)}$ は s 方式と i 法式を識別する $D(g)$ とは無関係なので s 方式と i 法式の解は一致する。

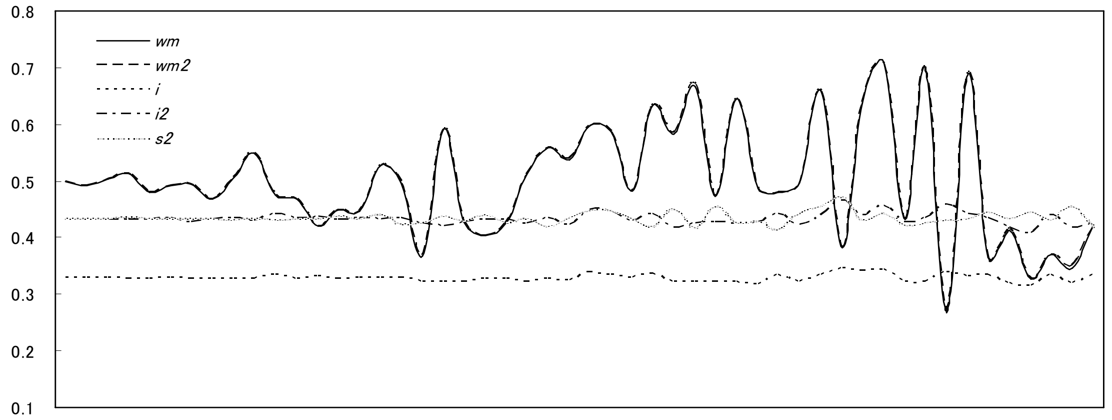
$V^{(2)}$ で表わされる（4-5）式に対して配分ウエイト行列は（3-2）式から求められ、

$$\begin{aligned} W^{(2)} &= V^{(2)}D(l_m{}'V^{(2)})^{-1} = V^{(2)}D(\bar{x})^{-1} \\ &= D(\bar{y})l_m l_n{}' \end{aligned} \tag{4-6}$$

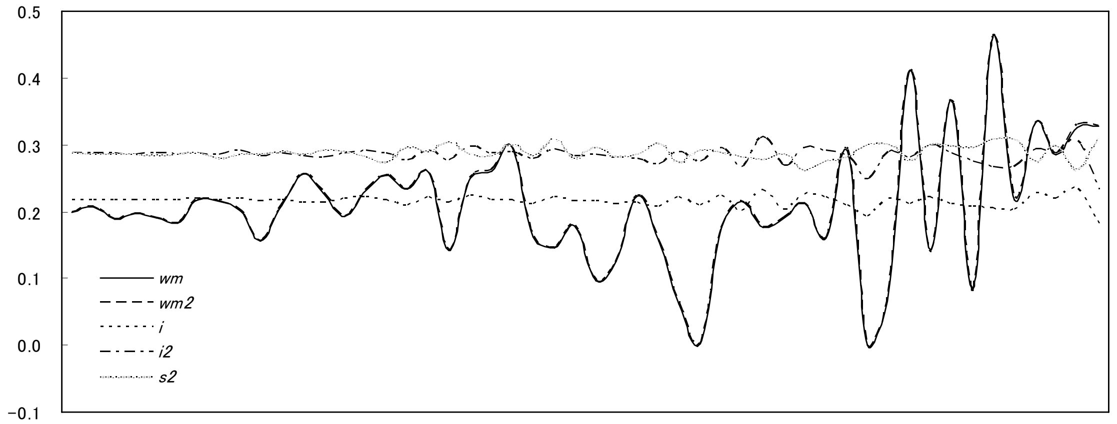
となる。この式はすべてに対応関係が存在するときの分類間の独立性を仮定した同一パターンの推計方法である（3-12）式に一致する。

図３　誤差を大きくしたときの推定方法の違いによる配分ウエイトの推計値の推移

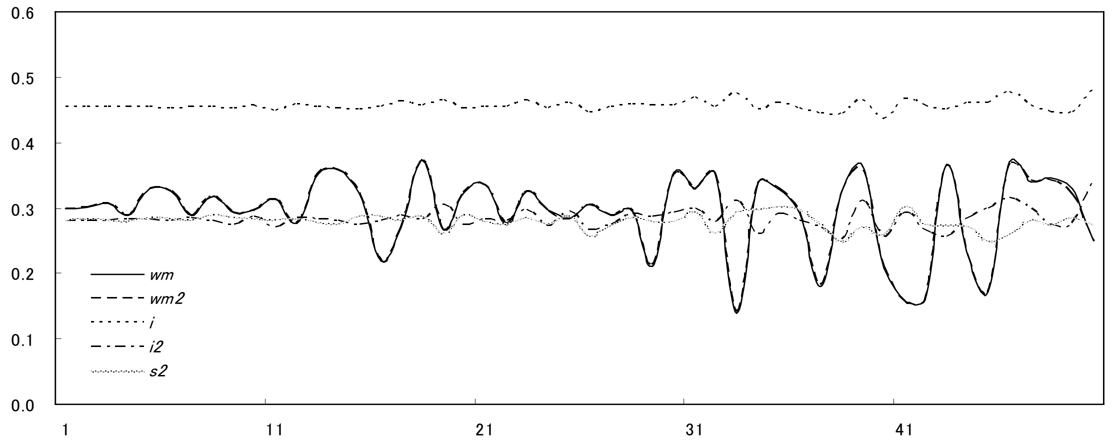
（1）真の値が $\omega_{11} = 0.5$ のときの推定値



（2）真の値が $\omega_{21} = 0.2$ のときの推定値



⑶ 真の値が $\omega_{31} = 0.3$ のときの推定値



（出所）付表 1 の左側の 1 行目から 3 行目までの推計結果にもとづき著者作成。

（注）取引額を考慮しない単純均等配分による推計方式は $\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{31} = 1/3$ として一定となるため図示するのを省略している。

分類AとBの対応関係において個別分類コードは必ずしもすべての対応関係が存在するとは限らない。すなわち、$\omega_{ij}=0$が存在するということである。このような一般的な配分ウエイト行列W_gに対するs方式とi法式の解の一致については野田の「最終調整におけるsとi方式の一致」（仮題）にて現在検討中の課題である。

4.5　配分ウエイト行列の特徴

分類Bの取引額Yの誤差として（1-6）式におけるUの要素に互いに独立な標準正規分布の10N倍を与えたとき、$N=0\cdots49$に対する推計結果が付表1に示されている。紙面の都合から個別分類コードa_1の$\omega_{11},\omega_{21},\omega_{31}$、同じように$a_2$の$\omega_{12},\omega_{22},\omega_{42}$、$a_4$の$\omega_{14},\omega_{24},\omega_{44}$、$a_5$の$\omega_{45},\omega_{55}$のみの推計値を表示している。付表1の（1）は最小2乗法wmによる推計であり、Nが0のときは誤差が生じていないので真の値そのものが推計されている。Nが大きくなるにつれて、同じことであるがYの誤差が大きくなるにつれて推計値は真の値に対して大きく変動していることがわかる。付表1の$\omega_{11},\omega_{21},\omega_{31}$についての誤差に対する変動の大きさを示したのが図3である。

付表1の（3）は分類間の独立性を仮定した同一配分パターン方式iによる推計であり、Nが0のときは誤差が生じていないので（4-3）式に一致している。この方式はYの合計により推計されるためYの誤差が大きくなるにもかかわらず推計値は誤差が無いときの推計値に対してあまり変動していないことが図2からもわかる。付表1の（5）で示される単純均等配分の方法sは（4-2）式に示されているようにNの変化に関わらず一定である。

付表1の（2）は$wm2$による推計であり、Nが0のときは誤差が生じていないので真の値そのものが推計されている。図3からYの誤差が大きくなるにつれてwmと同じように推計値は真の値に対して大きく変動している。

付表1の（4）は$s2$による推計であり、Nが0のときは誤差が生じていないのに（4-3）式とはかなり異なる値を示している。エントロピー最適化にさいして本章ではX,Yともに平均値、同じことであるが合計の値を利用しているためYの誤差が大きくなるにもかかわらず推計値は誤差が無いときの推計値に対してあまり変動していないことが図2からもわかる。付表1の(6)は$s2$による推計であり、図3からわかるようにYの誤差が大きくなるにもかかわらず推計値は誤差が無いときの推計値に対してあまり変動していない。

５．変換された貿易データの特徴

本節ではUN Comtrade Database貿易データにおける報告国日本の輸入に対して旧商品分類である分類Aを1962年から1975年までの商品分類のSITC-R1、新商品分類である分類Bを1976年から1987年までのSITC-R2として、推計方法の*i,s,wv,u,*とon-line検索で得られたUN Comtrade Database貿易データのSITC-R1系列の1976年から1987年までを*un_c*方式として、この5種類の異なった方法により変換されたSITC-R1における貿易データの特性を比較検討する(注6)。本節では最小2乗法は*wm*方式ではなく、配分ウエイト行列をベクトルへ置き換えて線形回帰式で求める*wv*方式を採用している。変換の構造は第1節の図1に示されている。

配分ウエイト行列の真の値が知られておりしかも配分構造の式が正しいとき、*wv*方式は統計値行列の誤差が少なければ真の値に近似し、誤差が大きくなればその誤差に敏感に反応して大きく変動する。本節では統計値誤差は実際には知られていないが、小さいと仮定して比較検討するため、*wv*を基準とする。

表５　SITC-R2 から SITC-R1 への対応関係における商品グループ 0023 の配分ウエイト行列の構造

SITC-R1　　SITC-R2	0251	0252	09808	29199
0250	1	1	ω_{13}	0
29195	0	0	0	ω_{24}
29199	0	0	ω_{33}	ω_{34}

（出所）UN Comtrade Database 貿易データにもとづき著者作成。

表６　商品グループ 0023 における既知ではない配分ウエイト行列の推計

		ω_{13}	ω_{13}	ω_{24}	ω_{24}
wm	(最小 2 乗法)	0.7780338	0.2219661	0.5816067	0.4183932
i	(独立性)	0.8791097	0.1208902	0.2193713	0.7806229
s	(単純均等配分)	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.5000000
u	(*ide_u*)	1.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000
un_c	(UN)	1.0000000	0.0000000	0.0000000	1.0000000

（出所）*wm,i,s,u* は著者作成による配分ウエイト行列の推計プログラムより作成、*un_c* は UN より入手した SITC-R2 と SITC-R1 の対応表にもとづき著者作成。

本節で使用する配分ウエイト行列の推計および貿易データの変換のためのプログラムは著者によって書かれた C 言語による実際的なプログラムである。エントロピー最適化を利用した最終調整のプログラムが未完成であるため本節では *i2* と *wm2* については省略する。

5.1　商品グループ 0023 の具体例

推計された取引額の例として商品グループ 0023 における配分ウエイト行列の推計値と貿易データの変換を示す。表 5 に示されているのは SITC-R2 から SITC-R1 への方向に対する配分ウエイトの構造であり、対応関係のタイプ 4a に属する。推計方法の *wm,i,s,u,un_c* により推計された配分ウエイト行列は表 6 に示されている。推計方法の *wm,i,s,u* は第 2 節および第 3 節で紹介されており、*un_c* は UN 作成の SITC-R2 と SITC-R1 の対応表から求めることができる。

表 7 に商品グループ 0023 に属する SITC-R1 の個別分類コードとなる 0250,29195,29199 の推計された取引額が示されている。SITC-R1 における個別商品分類コードの 0250 へ変換された推計値を例にとれば、この表ではそれぞれの方式による推計値と *wv* を基準としたときの相対誤差が示されている。*wv* を基準とすれば *s* は低めに推計されていることになり、その相対誤差は 10%から 20%、*i* は逆に高めに推計され相対誤差は 10%から 20%、*un_c* と *u* も共に高めに推計される。特に、*un_c* と *u* が完全に一致していることに注目する必要がある。表では示していないが、すべての個別分類コードで一致しているということではは必ずしもない。SITC-R1 の 29195 では *un_c* と *u* は一致しており配分ウエイトは 0 として推計されているため、取引額は 0 である。表 5 から商品グループ 0023 の対応関係において *wv* のときは SITC-R1 の 29195 は SITC-R2 の 29199 に対する 0.5816067 のウエイトで変換される。*s* のときは単純均等配分なのでそのウエイトは 0.5 となる。*s* の *wv* に対する相対

表７　SITC-R1 の分類コード 0250, 29195, 29199 における SITC-R2 から SITC-R1 への変換

y	*wv*	*s*		*un_c*		*u*		*i*	
(0250)									
1976	49140	41662	−0.152	55111	0.122	55111	0.122	51859	0.055
1977	68650	58455	−0.149	76790	0.119	76790	0.119	72357	0.054
1978	71940	59200	−0.177	82111	0.141	82111	0.141	76572	0.064
1979	80828	64071	−0.207	94206	0.166	94206	0.166	86920	0.075
1980	66060	53559	−0.189	76041	0.151	76041	0.151	70605	0.069
1981	85471	69658	−0.185	98095	0.148	98095	0.148	91220	0.067
1982	75228	59904	−0.204	87463	0.163	87463	0.163	80799	0.074
1983	72740	53536	−0.264	88071	0.211	88071	0.211	79721	0.096
1984	67056	49041	−0.269	81438	0.214	81438	0.214	73605	0.098
1985	71215	53324	−0.251	85500	0.201	85500	0.201	77720	0.091
1986	120873	91640	−0.242	144210	0.193	144210	0.193	131500	0.088
1987	133846	94647	−0.293	165140	0.234	165140	0.234	148096	0.106
(29195)									
1976	3334	2867	−0.140	0	.	0	.	1258	−0.623
1977	3704	3185	−0.140	0	.	0	.	1397	−0.623
1978	5477	4709	−0.140	0	.	0	.	2066	−0.623
1979	6229	5356	−0.140	0	.	0	.	2350	−0.623
1980	6199	5330	−0.140	0	.	0	.	2338	−0.623
1981	11172	9605	−0.140	0	.	0	.	4214	−0.623
1982	10210	8778	−0.140	0	.	0	.	3851	−0.623
1983	10451	8985	−0.140	0	.	0	.	3942	−0.623
1984	11050	9500	−0.140	0	.	0	.	4168	−0.623
1985	9861	8478	−0.140	0	.	0	.	3719	−0.623
1986	12379	10642	−0.140	0	.	0	.	4669	−0.623
1987	14328	12318	−0.140	0	.	0	.	5404	−0.623
(29199)									
1976	8369	16317	0.950	5733	−0.315	5733	−0.315	7727	−0.077
1977	10805	21521	0.992	6369	−0.411	6369	−0.411	9405	−0.130
1978	14111	27621	0.957	9417	−0.333	9417	−0.333	12891	−0.086
1979	17859	35491	0.987	10711	−0.400	10711	−0.400	15647	−0.124
1980	14440	27812	0.926	10659	−0.262	10659	−0.262	13756	−0.047
1981	20661	38041	0.841	19210	−0.070	19210	−0.070	21871	0.059
1982	19580	36339	0.856	17555	−0.103	17555	−0.103	20368	0.040
1983	22850	43521	0.905	17970	−0.214	17970	−0.214	22378	−0.021
1984	22331	41897	0.876	18999	−0.149	18999	−0.149	22664	0.015
1985	21378	40655	0.902	16955	−0.207	16955	−0.207	21015	−0.017
1986	32242	63212	0.961	21283	−0.340	21283	−0.340	29325	−0.090
1987	41601	82811	0.991	24636	−0.408	24636	−0.408	36275	−0.128

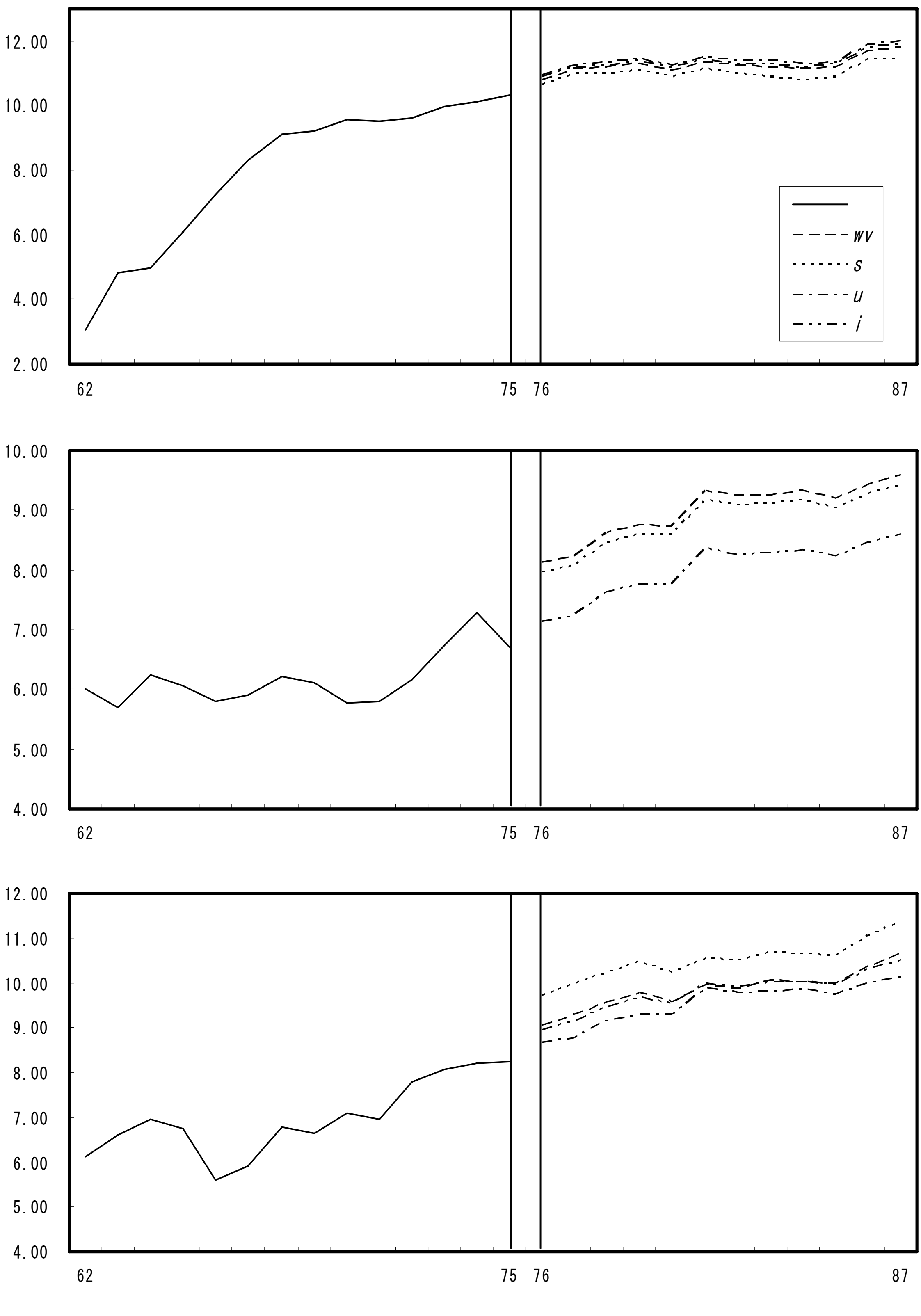
（出所）UN Comtrade Database 貿易データにもとづき著者作成。

（注）推計方法の表記は表７に同じ。*e* の相対誤差は(*e*-*wv*)/*wv* として計算している。他も同様である。推計値が 0 のときの相対誤差は欠損値．に置き換えている。取引額の単位は 1,000US$である。

誤差は1-0.5/0.58160により計算され-0.1403となり、すべての年において同じ率となる。*i* についても同じようにしてすべての年について同じ-0.623 となる。

図４に図示されているのは表７の推計値を時系列として表わしたものであり、推計された商品グループ 0023 における 1962 年から 1987 年までの SITC-R1 の 3 つの分類コード 0250,29195,29199 による取引額である。商品グループ 0023 において *u* と *un_c* は推計値が同じなので共に *u* で表わしている。推計された取引額の原型列が右肩上がりになるので、

図４　SITC-R1 の分類コード 0250、29195、29199 における貿易データの接続状況



（出所）表 7 にもとづき著者作成。

（注）図は上から順に SITC-R1 の分類コード、0250、29195、29199 の対数変換。

対数変換した系列を図示している。この図から新旧商品分類の改訂に伴う接続年の断層の状態を確認できる。SITC-R1 の 0250 において視覚的に見たとき *s* が一番近いように見え、次は *wv,i,u* の順である。29195 では *u* と *un_c* は取引がないのでそれ以外を比較すれば、1975 から直接接続させると *i,s,wv* の順であるが、1975 年の取引額が急に落ち込んだとすれば、その順は *wv,s,i* と逆になる。29199 では *u,s,wv* の順である。これからわかるように個別分類コードの直接の比較は結構厄介である。野田［6］の「商品分類の改訂に伴う貿易統計の変換—日本および韓国を例として—」では改訂年における断層の存在を不整合性のある系列として検証する方法を検討している。そこでは貿易データにトレンドの周りを大きく変動したり、場合によっては極端に変動する特性があるため改訂年についても商品分類の改訂による要因なのか貿易データ固有の要因なのか数量的に検証するのは必ずしも容易ではないと説明されている。変換後の整合性の評価方法については引き続き検討課題である。

5.2　変換による誤差の評価

商品グループにおける個別分類コードの評価は厄介なので、それらを集合として見たときの総合的な評価をおこなう。変換後の個別分類コードごとの評価は推計された取引額の *wv* を基準としたときにすべての個別分類コード、正確には *mdcc* 分類コードに対する取引額の *s,un_c,u,i* の散布状態を利用する。日本の 1978 年における輸入データの散布状態は図 5 に示されている。ここでも *wv* を評価基準として、*wv* を *x* 軸、*s,un_c,u,i* を *y* 軸として散布図を作成すると多くの点が右上に集中するので図 5 では log 変換したものを採用している。この図では *wv* に一致しているものは対角線上に位置し、*wv* より大きければ対角線より上に、逆に小さければ対角線より下に位置する。上位に位置するのは *s* が多く、それに対して下方に位置するものは *un_c,u,i* である。*wv* は存在するが *s,un_c,u,i* のいずれかが存在しないときは *x* 軸に、逆のときは *y* 軸に位置している。

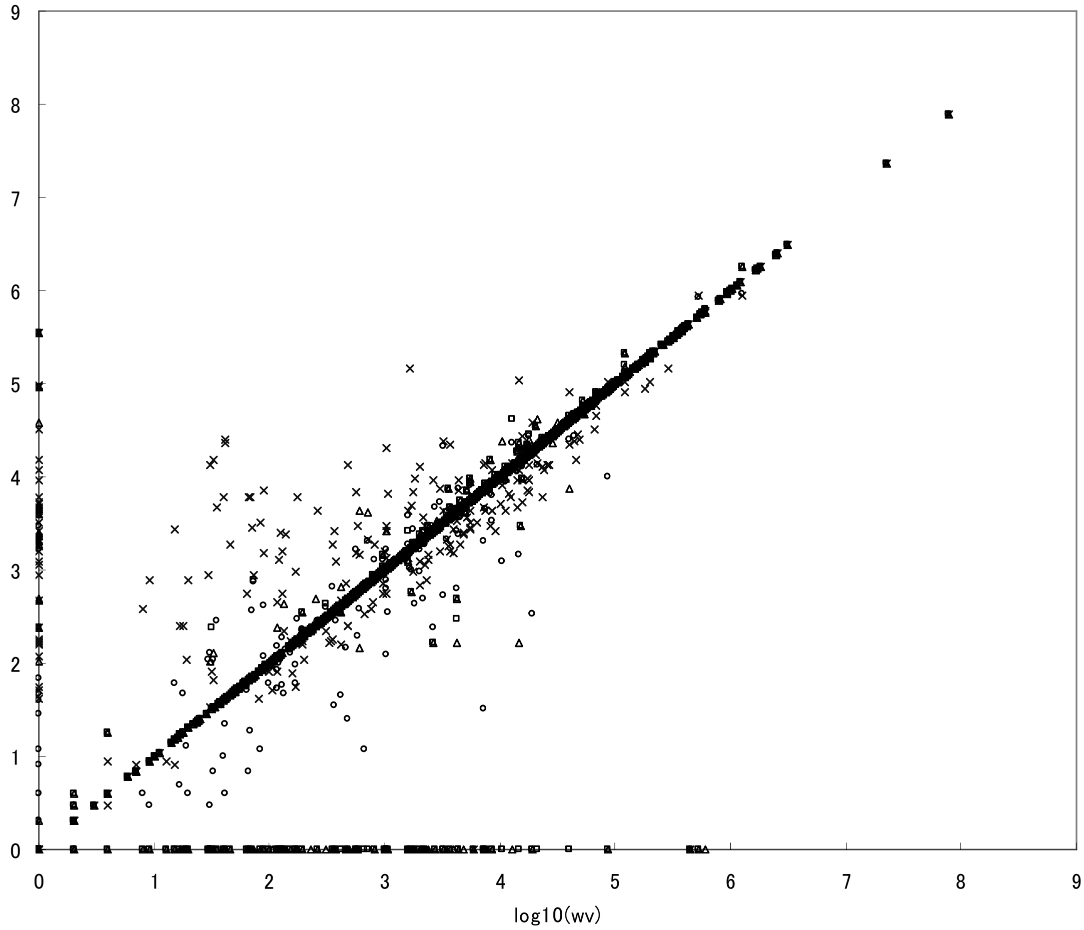
また、変換後の総合的な評価は推計された取引額の絶対誤差の総和に対する構成比を利用する個別分類コードの個数を *N* として、*wv* を基準としたときの個別分類コードに対する絶対誤差を *ae* とする。例えば *s* については、

$$ae_s = \sum_{i=1}^{N} |s_i - wv_i|$$

とする。その他についても同様である。表 9 は絶対誤差の構成比を示したものである。 *s* については、$ae_s / (ae_s + as_{un-c} + ae_u + ae_i)$ として表される。その他についても同様にする。表 9 によれば誤差に占める割合は圧倒的に *s* が大きく、99%近くであることがわかる。次に大きな割合を占めるのは *un_c* と続いて *u* である。両者共に大きな違いはなく 0.2%近い割合あるが、相対的に前者のほうが高くなっている。最後は *i* であり、0.15%近くを占めている。

変換後の総合的な評価として推計された取引額に対する線形の度合いである相関係数を利用する。図 3 の散布図と同じように 1978 年を対象としたときの相関係数行列が表 10 に示されている。相関係数行列において右上三角部分は推計された取引額の原系列、左下三角形はその対数変換された系列の相関係数を要素としている。相関係数の高いほうから順に組み合わされた推計方式を並べると、{*wv,i*}、{*un_c,u*}、{*s,i*}、{*u,i*}、{*wv,s*}、{*wv,u*}、{*un_c,i*}、{*wv,un_c*}、{*s,u*}、{*s,un_c*} となる。推計方法の違う 5 つの取引額をこの相関係数行列を基礎としてクラスター分析により近似度を尺度として類別化してみると、クラスターの距離である、complete、centroid、ward、average、single、mcquitty という手法の概念的な違いにも関わらず、{*wv,i*}、

図５　報告国日本の輸入におけるSITC-R1へ変換された*mdcc*の散布図



（出所）著者作成。

（注）1978年度を対象としている。×は単純均等配分法（*s*）、△はUN Comtrade Database 貿易データの取引額（*un_c*）、□は*ide-u*方式、○は分類間に独立を仮定した同一配分パターン（*i*）

{*un_c,u*}、{s} と 3 つのクラスに分割される。クラスターによるデンドログラムの図示は省略している。上位のクラスになると、{*wv,i*}、{*un_c,u*} のクラスに対して、前者に *s* が統合されたり、後者に *s* が統合されたりするような違いはあっても基本的には同じような階層的なクラスター構造が形成されていることになる。

以上のことから、5 つの推計方法の中で *s* は他に比較して特異な系列であることになる。残りの 4 つは、{*wv,i*} と {*un_c,u*} に類別できる。本節では第 4 節の結果から *wv* を基準としてきているので、{*wv,i*} を最適な推計方法の候補とすることができる。*wv* または,*i* のどちらかの選択については変換後の個別分類コードと総合評価の結果とともに、仮定が正しくないときの貿易データ *X,Y* の構成比の安定性やその誤差の程度、推計から変換までの推計プログラムの難易度を考慮しなければならない。実際の貿易データを考慮するとき、取引額の行列の構成比が安定して推移しているという仮説は受け入れ難いというのが本音である。商品グループが大きくなったときのデータ確保の方法も「擬似」ブートストラップとしての理論的な背景に欠けていることもあり、*i* 方式が現在のところ現実的で

表８　変換された SITC-R1 における絶対誤差の総和に対する構成比

y	*s*		*un_c*		*u*		*i*	
1976	1089492	0.993797	2623	0.002392	2328	0.002123	1851	0.001688
1977	1460660	0.995191	2707	0.001844	2412	0.001644	1938	0.001321
1978	1530033	0.994918	3260	0.002120	2510	0.001632	2046	0.001330
1979	190887	0.940404	4759	0.023445	4032	0.019862	3307	0.016290
1980	1656081	0.992230	5172	0.003099	4347	0.002604	3450	0.002067
1981	1449970	0.991272	6241	0.004267	3605	0.002465	2921	0.001997
1982	1527030	0.992846	5069	0.003296	3259	0.002119	2674	0.001739
1983	1494127	0.993940	4287	0.002852	2686	0.001787	2136	0.001421
1984	1597962	0.991749	6344	0.003937	3788	0.002351	3162	0.001963
1985	1629350	0.992966	5575	0.003397	3294	0.002008	2673	0.001629
1986	1760133	0.991787	9883	0.005569	2570	0.001448	2122	0.001196
1987	2153531	0.993603	7440	0.003433	3521	0.001625	2903	0.001339

（出所）著者作成。

（注）推計方法の表記は表７に同じ。

表９　推計された SITC-R1 の相関係数

		wv	*s*	*un_c*	*u*	*i*
wv	最小２乗法	1.0000000	0.9993437	0.9988766	0.9992144	0.9994606
s	単純均等配分	0.8772319	1.0000000	0.9981054	0.9984361	0.9998916
un_c	UN 方式	0.8274388	0.7348510	1.0000000	0.9996576	0.9983184
u	*ide_u* 方式	0.8714536	0.7699444	0.9274921	1.0000000	0.9986585
i	同一配分パターン	0.9539554	0.9132557	0.8610730	0.9064036	1.0000000

（出所）著者作成。

（注）相関係数行列の右上半分は原型列、左下半分は対数をそれぞれ表わす。

最良の推計方法と判断できる。アジア経済研究所の世界貿易統計データシステム AID-XT の基礎データでは台湾の SITC-R1 への推計および変換は以前は野田の *s* 方式が採用されていたが、2002 年以降は *i* 方式による推計方法へと変更されている。ただし、この *i* 方式は完全な *i* 方式ではなく、継続して取引額が得られない分類コードや小額取引の分類コードが存在して切断の要素となるときには単純均等配分の方式である *s* も部分的に利用している。

おわりに

本章で示したことは配分ウエイト行列の真の値が知られているとき、等号制約条件付き最小２乗法の *wm* と *wm2* の方式の特徴は (1-6) 式で表現された構造に対する誤差、すなわち分類 *B* に対応する取引額の *Y* の誤差に対して敏感に反応することである。*wm* と *wm2* の方式は誤差が小さければ真の値に近い値を推計するが、誤差が大きくなるにつれて真の値の中心として大幅に変動する傾向を示している。それとは逆に *i* および *s2* の方式では誤差に敏感ではなく真の値には必ずしも近くはないがほぼ一定の値を維持していることである。

本章ではさらに UN Comtrade Database 貿易データの報告国日本の輸入をもとにして作成された SITC-R1 系列の 1976 年から 1987 年までの貿易データとして、(1) アジア経済研究所作成となる *s,i,wm* と *u* 方式による推計値、(2) UN 作成による on-line 検索で得られた UN Comtrade Database 貿易データの SITC-R1 系列の 1976 年

から1987年までのun_c、の5種類を対象としてこれらの推計値の特性を比較検討している。wm を基準としたとき変換後の絶対誤差の比率から i,u,un_c,s の順に精度が高いという結論に達している。しかも、i,u,un_c はそれほど大きな開きは見られないが、s については誤差の程度が極端に大きく、利用についてはかなり問題があると判断せざるを得ない状態にある。したがって、s 方式についての評価は今後さらにやっていく必要があるが、アジア経済研究所でこれまで利用してきた均等配分による AID-XT 基礎データについてはその利用について見直す必要があると考えられる。

今後の課題としては現在検討中の最終調整の方法であるこれらの手法で得られた配分ウエイト行列を初期値とするエントロピー最適化法による推計方法の $s2,wv2$ も完成させ、これらの推計結果も含めて最適な推計方法を評価する必要がある。最終調整も X,Y の平均値あるいは総額を利用せずに年ごとの取引額を利用するという方法も可能である。取引額の誤差、最終調整の方法やしかも推計のためのプログラム作成の難易度も考慮したとき、どの推計方式を採用するのが最適化であるかを決めることも今後の課題として残されている。

（注1）配分ウエイト行列のゼロ制約を $\omega_{11}=0$ と $\omega_{12}=0$ とする。本文のときと同じようにして(2-12)式が得られる。ただし、

$$B=\xi_1 e_1(m)e_1(n)'+\xi_2 e_1(m)e_2(n)' = \begin{pmatrix} \xi' & o' \\ o & O \end{pmatrix} \tag{2-29}$$

である。また、$e_1(m)'\widetilde{W}e_1(n)=0$、$e_1(m)'\widetilde{W}e_2(n)=0$ となるので、

$$e_1(m)'\widetilde{W}\big(e_1(n) \quad e_2(n)\big)=\big(0 \quad 0\big)$$

となる。同じように、

$$e_1(m)'B\big(e_1(n) \quad e_2(n)\big)=\big(\xi_1 \quad \xi_2\big)$$

である。(2-11）式を利用して、

$$(me_1(m)'-l_m')\begin{pmatrix} \xi' C_{11} \\ O \end{pmatrix} = -l_2'-(me_1(m)'-l_m')\hat{W}\big(e_1(n) \quad e_2(n)\big)$$

となる。これを ξ について解けば、

$$(m-1)\xi' C_{11}=-l_2'-m\big(g_{11} \quad g_{12}\big)+\big(g_{\bullet 1} \quad g_{\bullet 2}\big)$$

となることから、

$$\xi=\left((m-1)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}\right)^{-1} \left(-l_2-m\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g_{\bullet 1} \\ g_{\bullet 2} \end{pmatrix}\right) \tag{2-30}$$

となる。この得られた ξ を利用すれば、(2-29）式から B が得られるため(2-12)式から $\widetilde{W}$ が求められる。

次に、配分ウエイトのゼロ制約を $\omega_{11}=0$ と $\omega_{22}=0$ とする。第1および第2のときと同じようにして(2-12）式が得られる。ただし、

$$B=\xi_1 e_1(m)e_1(n)'+\xi_2 e_2(m)e_2(n)' = \begin{pmatrix} D(\xi) & o' \\ o & O \end{pmatrix} \tag{2-31}$$

である。また、

$$e_1(m)'\widetilde{W}e_1(n)=0,\ e_2(m)'\widetilde{W}e_2(n)=0$$

となるので、(2-13）式を利用して、

$$(m-1)\xi_1 c_{11}-\xi_2 c_{12}=-1-mg_{11}-g_{\bullet 1}$$

と

$$-\xi_1 c_{12}-(m-1)\xi_2 c_{22}=-1-mg_{22}-g_{\bullet 2}$$

となる。この式をまとめて行列表示すれば、

$$\begin{pmatrix} (m-1)c_{11} & -c_{21} \\ -c_{12} & (m-1)c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \left(-l_2-m\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g_{\bullet 1} \\ g_{\bullet 2} \end{pmatrix}\right)$$

となり、これを ξ について解けば、

$$\xi=\begin{pmatrix} (m-1)c_{11} & -c_{21} \\ -c_{12} & (m-1)c_{22} \end{pmatrix}^{-1} \left(-l_2-m\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g_{\bullet 1} \\ g_{\bullet 2} \end{pmatrix}\right) \tag{2-32}$$

となる。この得られた ξ を利用すれば、(2-31）式から B が得られるため(2-12)式から $\widetilde{W}$ が求められる。

（注2）(2-24）式は以下のようにして求められる。(2-22）式の行列 B の要素を $\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{mn}$ の順

にベクトルで表わし、$\xi'=(\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_N)$、$H$の要素も同じようにしてベクトル h とすれば、ベクトルξの表示により（2-24）式に変換することができる。（2-22）式の左辺は、

$$
\begin{aligned}
ABC &= A\begin{pmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_m' \end{pmatrix}(c_1 \quad \cdots \quad c_n) \\
&= A\begin{pmatrix} b_1'c_1 & \cdots & b_1'c_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_m'c_1 & \cdots & b_m'c_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
h_{11} &= a_{11}c_1'b_1 + \cdots + a_{1n}c_1'b_m \\
h_{12} &= a_{11}c_2'b_1 + \cdots + a_{1n}c_2'b_m \\
&\vdots \\
h_{mn} &= a_{m1}c_n'b_1 + \cdots + a_{mn}c_n'b_m
\end{aligned}
$$

である。この要素を（2-22）式の右辺の要素が$h_{11}, h_{12}, \cdots, h_{mn}$となるような順に並べ、行列表示に直すと、

$$
\begin{pmatrix} a_{11}c_1' & \cdots & a_{1n}c_1' \\ a_{11}c_2' & & a_{1n}c_2' \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}c_n' & \cdots & a_{mn}c_n' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ \vdots \\ h_{mn} \end{pmatrix}
$$

となる。この式の右辺は、

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a_{11}\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} & \cdots & a_{1n}\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} \\ \vdots & & \\ a_{m1}\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} & \cdots & a_{mn}\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}C' & \cdots & a_{1n}C' \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}C' & \cdots & a_{mn}C' \end{pmatrix} \\
&= A \otimes C'
\end{aligned}
$$

となる。

（注３）アジア経済研究所は商品分類の改訂に伴って新商品分類から旧のそれへの変換のために UN 統計局が作業用として利用しているこれらの対応表を入手している。これらの対応関係は Microsoft Excel ワークシートによる 15 個のファイルであり、S2 to S1.xls、S3 to S1.xls、S3 to S2.xls、H0 to S1.xls、H0 to S2.xls、H0 to S3.xls、H1 to S1.xls、H1 to S2.xls、H1 to S3.xls、H1 to H0.xls、H2 to S1.xls、H2 to S2.xls、H2 to S3.xls、H2 to H0.xls、H2 to H1.xls より構成されている。ここで、SITC の改訂第 1 版は S1、同第 2 版は S2、同第 3 版は S3、HS1988 年度版は H0、同 1996 年度版は H1、同 2002 年度版は H2 と表わされている。

（注４）均等配分による配分ウエイトの推計は取引額を考慮せずに、商品グループ内において、商品分類体系に存在する詳細分類コードあるいは最下位レベルの分類コードにもとづく対応関係の個数のみから推計する方法である。均等配分による推計方法の詳細については黒子［2］の「商品分類の産業分類への変換－変換エラーデータの処理－」の中の「均等配分による変換」が詳しい。この方法は直接に対応しているかどうかは別として、分類コードが対応しているか否かの情報をもとに推計するため、対応しているものについては配分ウエイトの分布は一様分布、すなわち均等配分となる。均等配分による配分ウエイト行列の推計方法はグループ化された分類 A と B の対応関係においてそれぞれの個別分類コードのすべてが互いに対応しているとき、すなわち$m \times n$行列の配分ウエイト行列のすべての要素が$\omega_{ij} \neq 0$のとき、

$$
W = \begin{pmatrix} 1/m & \cdots & 1/m \\ \vdots & & \vdots \\ 1/m & \cdots & 1/m \end{pmatrix} = l_m l_n'/m
$$

と表される。配分ウエイト行列を推計するためには商品分類の詳細分類である*mdcc*分類のときは直接利用できるが、分類が統合されているときには黒子［1］の「貿易商品分類 SITC から IO24 部門分類への変換―変換エラーデータの処理―」や野田・深尾［11］が参考になる。

（注５）本節で使用される配分ウエイト行列の推計のためのプログラムは著者により S 言語で書かれたプロトタイプのプログラムである。第 6 節では実際的なデータ処理として C 言語で書かれたプログラムが使用されている。最終調整として（2）を採用していないのは後述しているように初期値として（1）と（2）を採用したときにはエントロピー最適化法による推計値が一致するからである。

（注６）野田［8］の配分ウエイト行列の推計において商品グループに対応関係の数が大きなものが存在しているときには試行錯誤による推計処理が必要とされ、そのための処理により推計誤差が生じることがある。データ処理による誤差を避けるため、本章では対象年度を1976年から1987年と限定している。

【参考文献】

［１］黒子正人「貿易商品分類 SITC から IO24 部門分類への変換―変換エラーデータの処理―」（野田容助編『改訂版世界貿易マトリクス―国際産業連関表24部門分類にもとづいて―』SDS No.84 Revised アジア経済研究所 2003）

［２］坂本慶行『カテゴリカルデータのモデル分析』共立出版社 1985

［３］坂本慶行、石黒真木夫、北川源四郎『情報量統計学』共立出版社 1983

［４］城坂晃正「SITC3 桁分類コード変換のための配分ウエイト推計－ニューラル・ネットワークを用いて－」（野田容助編『商品分類の改訂に伴う貿易統計の変換』統計資料シリーズ No.83 アジア経済研究所 2001）

［５］竹内啓、柳井晴夫『多変量解析の基礎』東洋経済新報社 1986

［６］野田容助「商品分類の改訂に伴う貿易統計の変換－日本および韓国を例として－」（野田容助編『商品分類の改訂に伴う貿易統計の変換』統計資料リーズ（SDS）No.83 アジア経済研究所 2001）

［７］―――「商品分類の対応関係における配分ウエイトの推計―SITC-R1 系列の 3 桁レベル分類コード作成に向けて―」（野田容助編『貿易指数の作成と応用―東アジア諸国・地域を中心として―』統計資料リーズ（SDS）No.87 アジア経済研究所 2003）

［８］―――「商品分類の対応関係における配分ウエイトの推計方法」（野田容助編『東アジア諸国・地域の貿易指数―作成から応用までの基礎的課題―』統計資料リーズ（SDS）No.88 アジア経済研究所 2005）

［９］―――「分類統一のための配分ウエイト行列の推計―ウエイト既知値を等号制約条件とする最小 2 乗法―」（野田容助編『長期時系列による貿易データと貿易指数の作成と応用―』調査研究報告書 開発研究センター2005-Ⅱ-04 アジア経済研究所 2006）

［10］―――「対応関係における配分ウエイトの推計―回帰式によるウエイト制約条件付き最小 2 乗法―」（野田容助編『長期時系列による貿易データと貿易指数の作成と応用―』調査研究報告書 開発研究センター2005-Ⅱ-04 アジア経済研究所 2006）

［11］野田容助・深尾京司「同一商品分類に変換された貿易額の比較―配分ウエイトにおける推計方法の違いを中心に―」（野田容助・黒子正人編『長期時系列における貿易データと貿易指数の作成と応用』調査研究報告書 開発研究センター2005-Ⅱ-04 アジア経済研究所 2006）

付表１ 分類Aにおける個別分類コードa_1, a_2, a_4, a_5に対応する配分ウエイト行列の推計値

N	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{12}	ω_{22}	ω_{42}	ω_{34}	ω_{44}	ω_{54}	ω_{45}	ω_{55}
(1) wm（等号制約条件付き最小２乗法）											
0	0.50000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.10000	0.60000	0.30000	0.10000	0.60000	0.40000
1	0.49112	0.20704	0.30184	0.41628	0.48742	0.09629	0.60839	0.29324	0.09836	0.59923	0.40077
2	0.50330	0.18866	0.30804	0.39216	0.51737	0.09048	0.60891	0.28471	0.10638	0.60274	0.39726
3	0.51404	0.19690	0.28906	0.37310	0.50511	0.12179	0.62821	0.27157	0.10022	0.59965	0.40035
4	0.47914	0.19125	0.32962	0.43996	0.51334	0.04670	0.60259	0.31170	0.08571	0.59079	0.40921
5	0.49160	0.18325	0.32515	0.40551	0.53315	0.06134	0.55563	0.34726	0.09711	0.59171	0.40829
6	0.49302	0.21823	0.28875	0.40635	0.46947	0.12418	0.54663	0.34793	0.10544	0.60521	0.39479
7	0.46757	0.21515	0.31728	0.45759	0.47575	0.06666	0.64258	0.27225	0.08517	0.59097	0.40903
8	0.50605	0.20112	0.29283	0.40308	0.48326	0.11366	0.58728	0.25914	0.15358	0.64518	0.35482
9	0.54881	0.15510	0.29609	0.32595	0.58426	0.08979	0.61936	0.24061	0.14003	0.65630	0.34370
10	0.47564	0.21021	0.31415	0.42562	0.48167	0.09271	0.59958	0.25700	0.14341	0.63186	0.36814
11	0.46749	0.25634	0.27617	0.46509	0.39641	0.13850	0.61590	0.36189	0.02221	0.51479	0.48521
12	0.42078	0.22715	0.35207	0.55512	0.44488	0.00000	0.67037	0.25250	0.07713	0.58074	0.41926
13	0.44944	0.19214	0.35841	0.48802	0.51198	0.00000	0.50731	0.28342	0.20928	0.73351	0.26649
14	0.44549	0.23273	0.32178	0.50182	0.43475	0.06342	0.61702	0.20608	0.17691	0.68306	0.31694
15	0.52720	0.25414	0.21866	0.34900	0.39236	0.25864	0.66239	0.13847	0.19914	0.69567	0.30433
16	0.49567	0.23338	0.27095	0.42737	0.45790	0.11473	0.64580	0.35420	0.00000	0.49996	0.50004
17	0.36825	0.25811	0.37364	0.63569	0.36431	0.00000	0.37065	0.49308	0.13626	0.57486	0.42514
18	0.59119	0.14180	0.26701	0.22127	0.59440	0.18432	0.64831	0.20093	0.15077	0.62602	0.37398
19	0.42688	0.24929	0.32383	0.54125	0.38396	0.07480	0.51281	0.27633	0.21087	0.70728	0.29272
:											
31	0.47151	0.17619	0.35231	0.46525	0.53475	0.00000	0.38821	0.39182	0.21997	0.75041	0.24959
32	0.64581	0.21520	0.13899	0.18032	0.41316	0.40653	0.64542	0.06637	0.28822	0.79830	0.20170
33	0.48681	0.17630	0.33689	0.40382	0.46006	0.13612	0.90263	0.09737	0.00000	0.43377	0.56623
34	0.47910	0.19084	0.33006	0.41462	0.51196	0.07343	0.52128	0.38344	0.09528	0.62070	0.37930
35	0.49584	0.21235	0.29181	0.34513	0.41085	0.24402	0.58645	0.24384	0.16971	0.64468	0.35532
36	0.65940	0.15957	0.18103	0.13756	0.59936	0.26309	0.89812	0.04145	0.06042	0.55151	0.44849
37	0.38088	0.29206	0.32706	0.58392	0.31974	0.09635	0.35252	0.22122	0.42626	0.90335	0.09665
38	0.63648	0.00000	0.36352	0.09925	0.90075	0.00000	0.48611	0.32359	0.19030	0.65510	0.34490
39	0.70826	0.08201	0.20973	0.00000	0.74260	0.25740	0.93632	0.03628	0.02740	0.49616	0.50384
40	0.43175	0.41126	0.15699	0.58327	0.03492	0.38181	0.75204	0.14385	0.10412	0.67106	0.32894
41	0.69880	0.14076	0.16043	0.03320	0.60655	0.36024	0.84843	0.15157	0.00000	0.39476	0.60524
42	0.26735	0.36619	0.36646	0.84344	0.15656	0.00000	0.98973	0.01027	0.00000	0.44492	0.55508
43	0.69088	0.08225	0.22687	0.11685	0.57905	0.30410	0.69159	0.00000	0.30841	0.85502	0.14498
44	0.36604	0.46244	0.17152	0.75707	0.00000	0.24293	0.93051	0.06949	0.00000	0.49051	0.50949
45	0.41194	0.21826	0.36980	0.50271	0.49729	0.00000	0.44317	0.27188	0.28495	0.84109	0.15891
46	0.32660	0.33375	0.33965	0.65547	0.27122	0.07331	0.86120	0.00000	0.13880	0.59784	0.40216
47	0.36999	0.28490	0.34511	0.67610	0.32390	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.49049	0.50951
48	0.34516	0.32596	0.32888	0.71015	0.28985	0.00000	0.22017	0.64325	0.13658	0.78151	0.21849
49	0.42316	0.32708	0.24976	0.56894	0.18502	0.24604	0.60820	0.21902	0.17279	0.63416	0.36584
(2) wm2（等号制約条件付き最小２乗法 ＆ エントロピー最適化法）											
0	0.50000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.10000	0.60000	0.30000	0.10000	0.60000	0.40000
1	0.49113	0.20702	0.30185	0.41630	0.48740	0.09630	0.60841	0.29324	0.09834	0.59928	0.40072
2	0.50326	0.18866	0.30808	0.39213	0.51737	0.09050	0.60890	0.28473	0.10637	0.60278	0.39722
3	0.51420	0.19695	0.28885	0.37317	0.50518	0.12164	0.62832	0.27151	0.10018	0.59971	0.40029
4	0.47913	0.19129	0.32958	0.43992	0.51340	0.04668	0.60272	0.31170	0.08558	0.59116	0.40884
5	0.49174	0.18332	0.32494	0.40554	0.53323	0.06123	0.55588	0.34710	0.09702	0.59183	0.40817
6	0.49315	0.21821	0.28863	0.40651	0.46949	0.12401	0.54692	0.34774	0.10534	0.60530	0.39470
7	0.46781	0.21505	0.31714	0.45786	0.47557	0.06657	0.64292	0.27210	0.08498	0.59139	0.40861

8	0.50591	0.20108	0.29301	0.40302	0.48322	0.11376	0.58728	0.25917	0.15356	0.64524	0.35476
9	0.54885	0.15519	0.29596	0.32589	0.58444	0.08968	0.61936	0.24049	0.14015	0.65600	0.34400
10	0.47573	0.21003	0.31424	0.42579	0.48135	0.09286	0.59913	0.25710	0.14377	0.63136	0.36864
11	0.46728	0.25575	0.27697	0.46504	0.39564	0.13932	0.61516	0.36242	0.02242	0.51288	0.48712
12	0.42117	0.22752	0.35131	0.55441	0.44460	0.00099	0.67155	0.25165	0.07681	0.58096	0.41904
13	0.44966	0.19241	0.35793	0.48730	0.51171	0.00100	0.50728	0.28294	0.20978	0.73271	0.26729
14	0.44592	0.23276	0.32131	0.50216	0.43468	0.06316	0.61797	0.20589	0.17615	0.68378	0.31622
15	0.52721	0.25398	0.21881	0.34882	0.39191	0.25926	0.66100	0.13848	0.20052	0.69423	0.30577
16	0.49579	0.23342	0.27079	0.42752	0.45804	0.11444	0.64563	0.35338	0.00099	0.50194	0.49806
17	0.36897	0.25878	0.37225	0.63491	0.36410	0.00099	0.37195	0.49221	0.13584	0.57519	0.42481
18	0.59167	0.14252	0.26581	0.22102	0.59625	0.18273	0.64970	0.20091	0.14939	0.62815	0.37185
19	0.42712	0.24924	0.32364	0.54154	0.38386	0.07460	0.51312	0.27594	0.21094	0.70692	0.29308
:											
31	0.47227	0.17627	0.35146	0.46508	0.53393	0.00099	0.38794	0.39095	0.22111	0.74903	0.25097
32	0.64447	0.21495	0.14057	0.17879	0.41004	0.41118	0.64305	0.06656	0.29040	0.79754	0.20246
33	0.48607	0.17547	0.33846	0.40406	0.45886	0.13708	0.90171	0.09729	0.00099	0.43569	0.56431
34	0.47867	0.19115	0.33018	0.41424	0.51279	0.07297	0.52340	0.38245	0.09416	0.62289	0.37711
35	0.49529	0.21226	0.29245	0.34488	0.41085	0.24427	0.58701	0.24368	0.16931	0.64506	0.35494
36	0.65838	0.16014	0.18148	0.13691	0.59961	0.26348	0.89756	0.04152	0.06092	0.54987	0.45013
37	0.38129	0.29276	0.32595	0.58402	0.32022	0.09575	0.35379	0.22160	0.42462	0.90384	0.09616
38	0.64041	0.00104	0.35856	0.09646	0.90260	0.00094	0.49092	0.32176	0.18732	0.65738	0.34262
39	0.70577	0.08312	0.21112	0.00098	0.74123	0.25778	0.93516	0.03661	0.02823	0.49092	0.50908
40	0.43232	0.41130	0.15637	0.58370	0.03490	0.38139	0.75063	0.14406	0.10530	0.66889	0.33111
41	0.69911	0.14061	0.16028	0.03333	0.60806	0.35860	0.84852	0.15051	0.00097	0.40073	0.59927
42	0.26900	0.36649	0.36451	0.84331	0.15570	0.00098	0.98880	0.01020	0.00100	0.44312	0.55688
43	0.69180	0.08232	0.22588	0.11709	0.57993	0.30298	0.69311	0.00100	0.30588	0.85631	0.14369
44	0.36613	0.46134	0.17252	0.75371	0.00099	0.24530	0.92900	0.06998	0.00102	0.48639	0.51361
45	0.41468	0.22057	0.36475	0.50125	0.49779	0.00095	0.45101	0.26984	0.27915	0.84283	0.15717
46	0.32598	0.33288	0.34114	0.65556	0.27107	0.07337	0.86062	0.00099	0.13839	0.59704	0.40296
47	0.37056	0.28776	0.34168	0.67362	0.32543	0.00095	0.99808	0.00096	0.00096	0.49057	0.50943
48	0.35074	0.33012	0.31914	0.71022	0.28892	0.00086	0.23948	0.63130	0.12921	0.78772	0.21228
49	0.42283	0.32750	0.24967	0.56949	0.18557	0.24494	0.61080	0.21867	0.17053	0.63683	0.36317

(3) ⅰ (分類間の独立性を仮定した同一配分パターン方式)

0	0.32827	0.21722	0.45451	0.38937	0.25765	0.35298	0.52949	0.34667	0.12384	0.73681	0.26319
1	0.32821	0.21740	0.45439	0.38916	0.25777	0.35307	0.52940	0.34693	0.12367	0.73721	0.26279
2	0.32839	0.21711	0.45451	0.38961	0.25758	0.35282	0.52949	0.34645	0.12406	0.73633	0.26367
3	0.32735	0.21713	0.45552	0.38884	0.25792	0.35323	0.53021	0.34612	0.12367	0.73676	0.26324
4	0.32782	0.21741	0.45477	0.38904	0.25801	0.35295	0.52978	0.34646	0.12376	0.73681	0.26319
5	0.32953	0.21723	0.45324	0.39005	0.25713	0.35282	0.52723	0.34674	0.12603	0.73342	0.26658
6	0.32610	0.21849	0.45541	0.38685	0.25920	0.35395	0.52678	0.34513	0.12809	0.72931	0.27069
7	0.32808	0.21677	0.45515	0.38892	0.25696	0.35412	0.53106	0.34855	0.12039	0.74327	0.25673
8	0.32706	0.22029	0.45264	0.39091	0.26330	0.34578	0.53328	0.34084	0.12587	0.73030	0.26970
9	0.32773	0.21552	0.45676	0.38984	0.25636	0.35380	0.52789	0.34376	0.12835	0.72814	0.27186
10	0.33422	0.21758	0.44820	0.39339	0.25609	0.35052	0.52494	0.34878	0.12628	0.73418	0.26582
11	0.32799	0.21368	0.45832	0.39207	0.25543	0.35250	0.53713	0.34559	0.11728	0.74662	0.25338
12	0.33198	0.21292	0.45510	0.39408	0.25275	0.35317	0.52898	0.34581	0.12520	0.73419	0.26581
13	0.32803	0.21850	0.45347	0.38941	0.25939	0.35120	0.52691	0.34375	0.12934	0.72660	0.27340
14	0.32950	0.22053	0.44997	0.38621	0.25849	0.35530	0.52592	0.35429	0.11978	0.74734	0.25266
15	0.32850	0.21749	0.45401	0.39066	0.25864	0.35070	0.52842	0.34323	0.12835	0.72783	0.27217
16	0.32926	0.20891	0.46182	0.39535	0.25085	0.35380	0.53973	0.34436	0.11592	0.74815	0.25185
17	0.32284	0.22118	0.45598	0.38295	0.26237	0.35468	0.53069	0.34800	0.12131	0.74152	0.25848
18	0.32319	0.21245	0.46436	0.38406	0.25246	0.36349	0.52629	0.34667	0.12705	0.73181	0.26819
19	0.32251	0.22402	0.45347	0.38395	0.26669	0.34936	0.53442	0.34585	0.11973	0.74284	0.25716
:											
31	0.32256	0.22339	0.45405	0.38224	0.26472	0.35304	0.53238	0.34932	0.11830	0.74702	0.25298
32	0.32225	0.20192	0.47583	0.39049	0.24468	0.36483	0.55178	0.34913	0.09909	0.77893	0.22107

33	0.31757	0.23108	0.45135	0.38326	0.27889	0.33785	0.54808	0.33993	0.11198	0.75221	0.24779
34	0.33513	0.20396	0.46090	0.40250	0.24496	0.35254	0.53483	0.34062	0.12454	0.73226	0.26774
35	0.32280	0.22463	0.45256	0.38026	0.26461	0.35513	0.52334	0.34862	0.12803	0.73139	0.26861
36	0.33397	0.22101	0.44502	0.39285	0.25998	0.34717	0.51643	0.34250	0.14107	0.70828	0.29172
37	0.34523	0.20993	0.44484	0.41365	0.25154	0.33480	0.54023	0.33934	0.12044	0.73805	0.26195
38	0.34138	0.19325	0.46537	0.40515	0.22935	0.36550	0.51997	0.34410	0.13594	0.71682	0.28318
39	0.34456	0.21936	0.43608	0.39536	0.25169	0.35295	0.51004	0.35977	0.13019	0.73428	0.26572
40	0.32223	0.21090	0.46686	0.39226	0.25674	0.35101	0.55179	0.34080	0.10740	0.76037	0.23963
41	0.32206	0.22186	0.45608	0.39602	0.27281	0.33116	0.55699	0.32890	0.11411	0.74242	0.25758
42	0.33781	0.21174	0.45045	0.40265	0.25238	0.34496	0.55021	0.35350	0.09628	0.78593	0.21407
43	0.33245	0.20635	0.46120	0.39455	0.24489	0.36056	0.54306	0.35773	0.09921	0.78289	0.21711
44	0.33377	0.20548	0.46075	0.38928	0.23966	0.37106	0.52151	0.36011	0.11839	0.75258	0.24742
45	0.32034	0.20346	0.47620	0.39626	0.25168	0.35206	0.54789	0.32746	0.12466	0.72428	0.27572
46	0.31611	0.22744	0.45644	0.37340	0.26866	0.35794	0.51120	0.33938	0.14942	0.69431	0.30569
47	0.33518	0.21857	0.44626	0.39160	0.25536	0.35304	0.51483	0.34860	0.13657	0.71852	0.28148
48	0.32017	0.23441	0.44542	0.37180	0.27222	0.35598	0.51055	0.35136	0.13809	0.71787	0.28213
49	0.33402	0.18273	0.48325	0.39900	0.21827	0.38272	0.52773	0.34989	0.12238	0.74087	0.25913

(4)　i2（分類間の独立性を仮定した同一配分パターン方式 & エントロピー最適化法）

0	0.43256	0.28622	0.28122	0.52129	0.34494	0.13377	0.61825	0.24403	0.13772	0.63923	0.36077
1	0.43252	0.28648	0.28100	0.52111	0.34516	0.13373	0.61827	0.24421	0.13751	0.63976	0.36024
2	0.43270	0.28607	0.28122	0.52150	0.34478	0.13372	0.61813	0.24387	0.13800	0.63862	0.36138
3	0.43113	0.28597	0.28289	0.52044	0.34521	0.13435	0.61899	0.24352	0.13749	0.63914	0.36086
4	0.43196	0.28647	0.28157	0.52082	0.34540	0.13378	0.61865	0.24379	0.13756	0.63928	0.36072
5	0.43383	0.28599	0.28018	0.52163	0.34388	0.13449	0.61369	0.24500	0.14131	0.63420	0.36580
6	0.42797	0.28675	0.28529	0.51616	0.34584	0.13800	0.61018	0.24473	0.14510	0.62779	0.37221
7	0.43279	0.28595	0.28126	0.52195	0.34486	0.13319	0.62273	0.24452	0.13275	0.64814	0.35186
8	0.43331	0.29186	0.27483	0.52232	0.35181	0.12587	0.62510	0.23751	0.13739	0.63352	0.36648
9	0.42987	0.28268	0.28745	0.51973	0.34178	0.13849	0.61115	0.24354	0.14531	0.62631	0.37369
10	0.44158	0.28747	0.27095	0.52697	0.34306	0.12997	0.61275	0.24629	0.14096	0.63600	0.36400
11	0.43366	0.28252	0.28382	0.52651	0.34302	0.13047	0.63344	0.23983	0.12673	0.65427	0.34573
12	0.43687	0.28019	0.28294	0.52694	0.33796	0.13510	0.61612	0.24390	0.13998	0.63536	0.36464
13	0.43144	0.28738	0.28118	0.51933	0.34592	0.13475	0.61092	0.24323	0.14586	0.62513	0.37487
14	0.43519	0.29128	0.27353	0.51981	0.34791	0.13228	0.61724	0.24990	0.13287	0.65287	0.34713
15	0.43244	0.28631	0.28125	0.52120	0.34507	0.13373	0.61390	0.24220	0.14391	0.62729	0.37271
16	0.43467	0.27579	0.28954	0.53081	0.33679	0.13240	0.63669	0.23841	0.12490	0.65623	0.34377
17	0.42529	0.29137	0.28334	0.51346	0.35178	0.13475	0.62099	0.24461	0.13441	0.64538	0.35462
18	0.41976	0.27593	0.30431	0.51147	0.33621	0.15232	0.60424	0.24823	0.14753	0.62722	0.37278
19	0.42763	0.29703	0.27534	0.51544	0.35803	0.12653	0.63026	0.24029	0.12945	0.64989	0.35011
:											
31	0.42667	0.29549	0.27784	0.51391	0.35590	0.13018	0.62706	0.24393	0.12901	0.65408	0.34592
32	0.42388	0.26560	0.31052	0.52905	0.33149	0.13946	0.65953	0.23732	0.10315	0.69705	0.30295
33	0.42794	0.31140	0.26066	0.51628	0.37568	0.10803	0.66082	0.22701	0.11216	0.66930	0.33070
34	0.44047	0.26807	0.29145	0.53707	0.32686	0.13608	0.62329	0.23867	0.13803	0.63358	0.36642
35	0.42367	0.29483	0.28150	0.50811	0.35358	0.13831	0.60590	0.24822	0.14588	0.62985	0.37015
36	0.43856	0.29023	0.27122	0.52111	0.34486	0.13404	0.59039	0.24555	0.16405	0.59949	0.40051
37	0.46495	0.28274	0.25231	0.55520	0.33761	0.10719	0.64625	0.22992	0.12383	0.64995	0.35005
38	0.43991	0.24902	0.31107	0.53561	0.30320	0.16119	0.58659	0.24964	0.16377	0.60386	0.39614
39	0.45482	0.28955	0.25564	0.53129	0.33823	0.13048	0.59178	0.25858	0.14964	0.63344	0.36656
40	0.42791	0.28007	0.29201	0.52854	0.34593	0.12553	0.66012	0.22975	0.11013	0.67597	0.32403
41	0.43507	0.29972	0.26521	0.53064	0.36555	0.10381	0.67268	0.21587	0.11145	0.65952	0.34048
42	0.45732	0.28665	0.25604	0.54935	0.34433	0.10632	0.67368	0.23289	0.09343	0.71369	0.28631
43	0.44135	0.27394	0.28471	0.53701	0.33331	0.12968	0.65259	0.24430	0.10311	0.70321	0.29679
44	0.43391	0.26713	0.29896	0.52311	0.32205	0.15485	0.60337	0.25922	0.13741	0.65356	0.34644
45	0.41838	0.26573	0.31588	0.52534	0.33367	0.14100	0.63712	0.22648	0.13640	0.62412	0.37588
46	0.40741	0.29313	0.29947	0.49005	0.35259	0.15736	0.56764	0.24797	0.18439	0.57353	0.42647
47	0.43910	0.28633	0.27457	0.52130	0.33994	0.13877	0.58948	0.25094	0.15958	0.61128	0.38872

48	0.41807	0.30609	0.27584	0.49474	0.36223	0.14304	0.58137	0.25474	0.16389	0.60851	0.39149
49	0.42575	0.23290	0.34135	0.52993	0.28990	0.18017	0.59869	0.25387	0.14744	0.63260	0.36740

(5)　s（単純均等配分方式）

0	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.50000	0.50000
1	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.50000	0.50000
2	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.50000	0.50000
3	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.50000	0.50000
:											
49	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.33333	0.50000	0.50000

(6)　s2（単純均等配分方式 & エントロピー最適化法）

0	0.43256	0.28622	0.28122	0.52129	0.34494	0.13377	0.61825	0.24403	0.13772	0.63923	0.36077
1	0.43258	0.28568	0.28174	0.52138	0.34432	0.13429	0.61728	0.24412	0.13860	0.63784	0.36216
2	0.43318	0.28600	0.28082	0.52130	0.34418	0.13452	0.61602	0.24520	0.13878	0.63858	0.36142
3	0.43461	0.28587	0.27952	0.52321	0.34415	0.13264	0.61782	0.24351	0.13867	0.63716	0.36284
4	0.43169	0.28344	0.28487	0.52064	0.34184	0.13752	0.61253	0.24517	0.14229	0.63276	0.36724
5	0.43242	0.28530	0.28228	0.52009	0.34314	0.13677	0.61089	0.24610	0.14301	0.63247	0.36753
6	0.43279	0.28617	0.28104	0.52125	0.34466	0.13409	0.61840	0.24498	0.13661	0.64199	0.35801
7	0.43233	0.27907	0.28861	0.52426	0.33841	0.13733	0.61694	0.24209	0.14098	0.63198	0.36802
8	0.43025	0.28585	0.28390	0.51914	0.34491	0.13595	0.61651	0.24468	0.13881	0.63804	0.36196
9	0.43122	0.28547	0.28331	0.51915	0.34368	0.13717	0.61106	0.24574	0.14320	0.63182	0.36818
10	0.42998	0.28963	0.28039	0.51870	0.34939	0.13191	0.62272	0.24284	0.13443	0.64367	0.35633
11	0.43284	0.28540	0.28177	0.52268	0.34464	0.13268	0.61703	0.24061	0.14236	0.62827	0.37173
12	0.43250	0.29105	0.27645	0.52097	0.35058	0.12845	0.62925	0.24273	0.12802	0.65470	0.34530
13	0.43663	0.28974	0.27363	0.52375	0.34755	0.12870	0.62164	0.24376	0.13460	0.64424	0.35576
14	0.43176	0.28143	0.28682	0.52295	0.34087	0.13619	0.62211	0.24388	0.13401	0.64538	0.35462
15	0.44018	0.27282	0.28700	0.53070	0.32893	0.14038	0.60732	0.24638	0.14630	0.62743	0.37257
16	0.42326	0.29608	0.28066	0.51051	0.35711	0.13239	0.62158	0.24309	0.13533	0.64237	0.35763
17	0.42589	0.28830	0.28581	0.51551	0.34897	0.13552	0.62262	0.24390	0.13349	0.64628	0.35372
18	0.43805	0.30249	0.25946	0.52206	0.36049	0.11745	0.62868	0.23879	0.13253	0.64309	0.35691
19	0.42643	0.28496	0.28861	0.51224	0.34231	0.14545	0.59673	0.25036	0.15291	0.62081	0.37919
:											
32	0.42529	0.28167	0.29304	0.51832	0.34329	0.13839	0.62334	0.24154	0.13512	0.64127	0.35873
33	0.42782	0.27614	0.29604	0.52000	0.33563	0.14437	0.63292	0.25396	0.11313	0.69182	0.30818
34	0.41409	0.28421	0.30170	0.51077	0.35056	0.13867	0.62826	0.23410	0.13764	0.62975	0.37025
35	0.44125	0.26116	0.29759	0.52952	0.31340	0.15708	0.58263	0.25626	0.16111	0.61399	0.38601
36	0.45354	0.27420	0.27226	0.54465	0.32928	0.12608	0.62830	0.24229	0.12941	0.65184	0.34816
37	0.47020	0.28159	0.24821	0.55642	0.33322	0.11037	0.64794	0.24347	0.10859	0.69156	0.30844
38	0.42936	0.29955	0.27109	0.51188	0.35712	0.13099	0.61423	0.24895	0.13683	0.64532	0.35468
39	0.44252	0.29844	0.25904	0.52919	0.35688	0.11393	0.62665	0.23047	0.14288	0.61731	0.38269
40	0.42112	0.27742	0.30146	0.52730	0.34736	0.12534	0.64911	0.21554	0.13535	0.61426	0.38574
41	0.42558	0.29943	0.27499	0.50981	0.35869	0.13151	0.61197	0.24432	0.14372	0.62963	0.37037
42	0.43000	0.29829	0.27171	0.51584	0.35783	0.12634	0.63000	0.24419	0.12581	0.65997	0.34003
43	0.43312	0.29617	0.27071	0.52032	0.35579	0.12388	0.64101	0.24418	0.11481	0.68018	0.31982
44	0.44488	0.30658	0.24854	0.52396	0.36107	0.11497	0.62181	0.24422	0.13397	0.64576	0.35424
45	0.43268	0.30852	0.25880	0.51359	0.36621	0.12019	0.60184	0.23548	0.16268	0.59142	0.40858
46	0.44402	0.27455	0.28142	0.54278	0.33562	0.12161	0.63765	0.22541	0.13694	0.62207	0.37793
47	0.42945	0.29811	0.27244	0.51822	0.35974	0.12205	0.63768	0.23673	0.12559	0.65338	0.34662
48	0.45302	0.26244	0.28454	0.55580	0.32198	0.12222	0.66901	0.23423	0.09677	0.70765	0.29235
49	0.41887	0.30810	0.27303	0.50220	0.36940	0.12841	0.59660	0.23402	0.16938	0.58013	0.41987

（出所）著者作成。

（注）表 4 に同じ。