第 7 章

対応関係コード表のグループにおけるタイプの識別とその特徴

野田容助

はじめに

体系の異なる分類どうしを結び付けるには両者の対応関係を明らかにした対応関係コード表が必要であり、対応関係コード表を使用する場合には両者の分類がどのような対応関係にあるかを検討することが重要な課題となる。本書の第 6 章で述べたように、対応関係コード表の中で分類の核になる閉じた対応関係にある分類コードの集まりがグループである。貿易データにおいて体系の異なる分類間の変換はグループ内におけるの分類間の対応関係に基づいて、場合によっては取引額も考慮して配分ウエイトを推計し、この配分ウエイトでそれぞれの分類コードに対応する取引金額および数量を再配分することで可能となる。配分ウエイトの推計方法については野田［2007］が参考になる。

貿易データにおいて分類Aから分類Bへの方向に変換するとき、グループ内におけるAとBの対応関係の状態は 5 つのタイプに分けることができる。両者における対応関係の分類コードが 1 対 1 から構成されるタイプ 1、1 対多であるタイプ 2、多対 1 であるタイプ 3、多対多であるタイプ 4 である。タイプ 4 は貿易データの変換において配分ウエイトを未知数とする構造方程式において、配分ウエイトが一意の解となるタイプ 4a とそうではないタイプ 4b に分けることができる。

本章では商品グループ内で構成される変換のための配分ウエイトの構造式において対応関係のタイプを識別する方法を示す。この識別方法に従えば対応関係はタイプ 4a とタイプ 4b の 2 つに分けることができ、タイプ 1 からタイプ 3 まではタイプ 4a の特殊な状態であることが示される。本章ではまた対応関係のタイプ 4a を中心に貿易データを変換するときの基本的なパターンを示し、そのときに得られる配分ウエイト行列を推計する。

本章はグループ化された対応関係のタイプ、対応関係のタイプ識別の具体例、貿易データの変換とその評価から構成されている。

1. グループ化された対応関係のタイプ

グループ化された対応関係を使用するには対応する 2 つの分類Aと分類Bがどのような対応関係にあるかを知ることが必要である。グループ内においてAはn個の分類コードから構成され、Bはm個の分類コードから構成されているとする。さらに対応関係はAからBへ変換するという方向を持っているとする。

（1）対応関係のタイプ 1 はAとBのそれぞれの分類コードが 1 対 1 に対応する関係である。すなわち、mとnが共に 1 である。このタイプではグループに含まれる対応する対応関係の個数は 1 個である。

（2）対応関係のタイプ 2 はAとBが 1 対多の対応関係であり、$m>1$に対してnは 1 である。このグループに含まれる対応関係の個数はBに含まれる分類コードの個数のnに等しい。このタイプ

は変換において配分構造が生じる対応関係である。

（3）対応関係のタイプ３はAとBが多対１の対応関係であり、mが１に対して$n>1$である。タイプ２とは逆に、グループに含まれる対応関係の個数はAに含まれる分類コードの個数のmに等しい。このタイプは変換において統合型の対応関係である。

（4）対応関係のタイプ４はAとBが多対多の対応関係であり、$m>1$であり同時に$n>1$である。このタイプのグループに含まれる対応関係の個数について特に決まったパターンは存在しない。このタイプは配分構造と統合型が共存する対応関係である。

対応関係のタイプ４はさらにタイプ 4a と 4b とに分けることができる。タイプ 4a は配分ウエイト行列を推計するときに一意的な解を持つ対応関係の集まりであり、タイプ 4b はそうではない対応関係である。対応関係のタイプ１から３まではタイプ 4a の特殊なパターンである。

1.1. 配分ウエイト行列の構造

分類Aから分類Bへの対応関係をもとに前者の取引額を変換して後者の取引額を推計するとき、その変換のフィルターの役割を果たすのが配分ウエイト行列である。商品分類の改訂に伴って作成される新旧それぞれの商品分類をAとBにおいたとき、野田［2007］によれば、配分ウエイト行列は商品分類の改訂前後のそれぞれの取引額を利用して推計されるが、そのために以下で説明するような仮説が必要となる。この仮説を変換可能であるための仮説といい、グループ化されたAからBへの配分ウエイト行列をもとに前者の取引額を後者のそれに変換するための配分構造が定式化される。しかし、商品分類から産業分類への変換の例のように、特に同一年度における変換の場合には変換のための仮説はそれほど強い必要はない。

商品グループ内におけるAからBの方向に対する対応関係が存在するとき、商品分類の改訂前後のそれぞれの期間にこの両分類による取引額が存在し、取引額の構造は多変量定常確率過程に従っているものする [1]。すなわち、分類Aにおける取引額の構成比はその期間においてAの取引額の構造から得られる標本として解釈することができる。同じように分類BについてもBの取引額の構造から得られる標本とする。しかもその期間に両分類によるそれぞれの標本が同時に得られるものとする。

実際には同一期間からは両分類の取引額の構成比に相当する標本は得られず、両分類の取引額の構成比は商品分類における改訂前後の期間からそれぞれ得られる。この仮説は改訂前の期間から得られた標本が改訂後の期間から得られた標本と同一の標本から求められるという相当に強い仮説といえる [2]。ここで重要なことは、この仮説は改訂前の分類Bの構造がそのまま改訂後にも同じように維持されていることであり、しかも得られる標本は取引額そのものではなくその構造を示す構成比としていることである。

商品グループ内における分類Aのn個ある分類コードの$a_1 \cdots a_n$のそれぞれに統計値であるn個の取引額$x_1^* \cdots x_n^*$が対応しているとする。$j=1 \cdots n$に対して、x_j^*は年次データに相当するh個の標本から構成されるベクトルとして表わされ、$x_j^*=(x_{j1}^* \cdots x_{jh}^*)'$である。$(x_1^* \cdots x_n^*)'=X^*$とすれば、

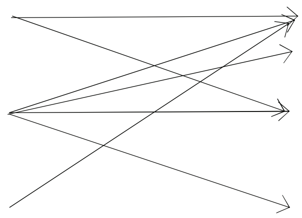
$$\begin{pmatrix} x_1^{*}{}' \\ \vdots \\ x_n^{*}{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}^* & \cdots & x_{1h}^* \\ & & \\ x_{n1}^* & \cdots & x_{nh}^* \end{pmatrix} = X^*$$

となる。したがって、Aのある期間の取引額の行列は$n \times h$行列のX^*で表わされる。l_mをすべての要素が１であるm次ベクトル、$D(x)$をベクトルxを対角要素とする対角行列とする。X^*については、

$$X = X^* D(l_m' X^*)^{-1} \tag{1-1}$$

として構成比を要素とする行列Xが作成できる。

図１　商品グループ内における分類Aの$a_1 \cdots a_n$から分類Bのb_iへの方向に対する配分構造

分類Aの取引構造 X	分類A	配分構造とウエイト(ω_{ij})	分類B	分類Bの取引構造 Y
$x_1' = (x_{11} \cdots x_{1h})$	a_1		b_1	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$x_j' = (x_{j1} \cdots x_{jh})$	a_j		b_i	$y_i' = (y_{i1} \cdots y_{ik})$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$x_n' = (x_{n1} \cdots x_{nh})$	a_n		b_m	

（出所）筆者作成

（注）商品グループ内における分類Aの分類コードa_jから分類Bの分類コードb_iへの方向に対する配分ウエイトがω_{ij}である。分類Aと分類Bのそれぞれの統計値XとYの年数はそれぞれhとkとしている。

表１　商品グループ内の分類AからBの向けた変換の配分構造

分類B ＼ 分類A	a_1	a_2	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n	*Total*
b_1	$x_1\omega_{11}$	$x_2\omega_{12}$		$x_j\omega_{1j}$		$x_n\omega_{1n}$	y_1
:	:	:		:		:	:
b_i	$x_1\omega_{i1}$	$x_2\omega_{i2}$		$x_j\omega_{ij}$		$x_n\omega_{in}$	y_i
:	:	:		:		:	:
b_m	$x_1\omega_{m1}$	$x_2\omega_{m2}$		$x_j\omega_{mj}$		$x_n\omega_{mn}$	y_m
Total	x_1	x_2		x_j		x_n	1

（出所）野田容助編『東アジア諸国・地域の貿易指数―作成から応用までの基礎的課題―』（SDS No.88 アジア経済研究所 2005）の第2章の表2を引用

（注）ω_{ij}は商品グループ内における分類Aのa_jから分類Bのb_iへの方向に対する配分ウエイトである。表2においてi,j要素は取引額を表示しているため、この表は配分額表とも呼ばれる。配分額表において分類Aの*Total*となる$x_1 \cdots x_n$は分類Aの周辺和、分類Bの*Total*となる$y_1 \cdots y_m$は分類Bの周辺和と呼ばれる。

同一商品グループ内において分類Bのm個ある分類コードの$b_1 \cdots b_m$のそれぞれに対する取引額を$y_1^* \cdots y_m^*$とする。年次データのy_i^*はk個の標本から構成されるベクトルで表わされ、$i = 1 \cdots m$に対して$y_i^* = (y_{i1}^* \cdots y_{ik}^*)'$である。$(y_1^* \cdots y_m^*)' = Y^*$とすれば、$B$の取引額の行列は$m \times k$行列の$Y^*$で表わされる。$Y^*$についても同じように、構成比を要素とする行列を、

(1-2) $$Y = Y^* D(l_n' Y^*)^{-1}$$

として作成できる。

商品グループ内においてAからBの方向に対する変換のための配分ウエイトをAの分類コードのa_jからBの分類コードのb_iへの方向に対してω_{ij}とする。図1と表1にω_{ij}に対する配分構造が示されている。ω_{ij}を要素とする行列が配分ウエイト行列であり、これをWとすれば、

$$W = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{m1} & \cdots & \omega_{mn} \end{pmatrix}$$

と表わされ、$m \times n$行列である。商品分類の対応

関係では商品グループ内に A の a_j と B の b_i それぞれの分類コード間に対応関係がない状態が存在するのが一般的である。このような状態は配分ウエイト行列において 0 となる要素が存在する状態であり、要素として $\omega_{ij}=0$ を含むような一般的な配分ウエイト行列を W_g とする。表 1 に示されている変換のための配分構造において、a_j の取引額は、$x_j=(\omega_{1j}+\cdots+\omega_{mj})x_j$ となり、

$$\omega_{1j}+\cdots+\omega_{mj}=1$$

である。ここで、$j=1\cdots n$ である。一般的な配分ウエイト行列はウエイト条件として、

(1-3) $$l_m{}'W_g=l_n{}'$$

となる。両分類の取引額が同一期間に存在すると仮定しているので標本数は同一とすることができ、図 2 に示されているように B の分類コードである b_i の $i=1\cdots m$ に対して y_i は、

$$y_i=x_1\omega_{i1}+\cdots+x_n\omega_{in}$$

と表すことができる。この配分ウエイト行列に対して構造式は、

(1-4) $$Y=W_gX+U$$

と表すことができる。U は誤差であり Y と同じ構造を持つものとする。

したがって、商品グループ内に存在する A から B への方向に対する対応関係とそれぞれの分類に対応する構成比で構成された取引額行列の X と Y が得られたとき、（1-3）式と（1-4）式から配分ウエイト行列 W_g が推計される。

商品分類の改訂に伴って作成される新旧それぞれの商品分類に対する配分ウエイト行列の推計方法の例は野田［2007］が参考になる。商品分類から産業分類への変換に対する配分ウエイト行列の推計と貿易データの変換の例は内田・野田［2007］が参考になる。

1.2　対応関係のタイプ識別の準備

分類 A から分類 B への方向をもった対応関係が考えられるとき、グループ化された両分類における対応関係のタイプの識別のために、（1-4）式において撹乱項を $U=O$ 、一般的配分ウエイト行列の表記を簡単にするため $W_g=W$ とおいて転置すると、$Y'=X'W'$ となる。O_{mn} はすべての要素が 0 から構成される $m\times n$ 行列である。混乱がないときは簡単に O で表わす。$i=1\cdots m$ に対して、$\omega_i{}'=(\omega_{i1}\cdots\omega_{in})$ とすれば、$W'=(\omega_1\cdots\omega_n)$ と表わされ、

(1-5) $$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_m \end{pmatrix}=X'\begin{pmatrix}\omega_1 & \cdots & \omega_m\end{pmatrix}$$

となり、$y_i=X'\omega_i$ である。（1-2）式からわかるように、$i=1\cdots m$ に対して $y_i=(y_{i1}\cdots y_{ik})'$ である。（1-5）式をベクトルに置き換えるため、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X'\omega_1 \\ \vdots \\ X'\omega_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X' & & \\ & \ddots & \\ & & X' \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m\end{pmatrix}$$

とする。$y'=(y_1{}'\cdots y_m{}')$ は Y から、

$$y_{11},y_{12},\cdots,y_{1k},\cdots,y_{m,k-1},y_{mk}$$

となるように行に沿って上から順に要素を取り出して作成された mk 次ベクトルである。$\omega'=(\omega_1{}'\cdots\omega_n{}')$ は配分ウエイト行列 W から、

$$\omega_{11},\omega_{12},\omega_{13},\cdots,\omega_{m,n-1},\omega_{mn}$$

となるように行に沿って上から順に要素を取り出して作成された mn 次ベクトルであり、これを配分ウエイトベクトルという。さらに、

$$X_2=\begin{pmatrix} X' & & \\ & \ddots & \\ & & X' \end{pmatrix}$$

とすれば、

(1-6) $$y=X_2\omega$$

と表わすことができる。定義からわかるように、n 次の単位行列を I_n とするとき、ω のウエイト条件は（1-3）式のウエイト条件より、I_n を m 個並べた行列を、$C_n(m)=\begin{pmatrix}I_n & \cdots & I_n\end{pmatrix}$ とするとき、

(1-7) $$\begin{aligned} C_n(m)\omega &= \omega_1+\cdots+\omega_m \\ &= \begin{pmatrix}\omega_{11}+\cdots+\omega_{m1} \\ \vdots \\ \omega_{1n}+\cdots+\omega_{mn}\end{pmatrix}=W'l_m \\ &= l_n \end{aligned}$$

となる。$X_3 = \left(C_n(m)' \quad X_2'\right)'$ とすれば、X_3 は $(mk+n)\times mn$ 行列であり、ウエイト条件と配分ウエイトベクトルの構造式をまとめた連立方程式が得られ、

$$\begin{pmatrix} l_n \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_n(m) \\ X_2 \end{pmatrix}\omega = X_3\omega \tag{1-8}$$

と表わすことができる。ここで、

$$X_3 = \begin{pmatrix} C_n(m) \\ X_2 \end{pmatrix}$$

としている。

配分ウエイト行列を推計するときには取引額における標本の数は多ければ多いほど望ましいわけであるが、本章では対応関係のタイプを識別することを目的としているので、取引額は A と B における適当な年の取引額のみを利用しても構わない。また、取引額の年における平均を利用することも可能である。以下、適当な年の取引額のみの利用した例と取引額の年における平均を利用した例をそれぞれ示す。

1.3　取引額として最初の年度を採用

対応関係のタイプを識別するとき、分類 A と分類 B における取引額として適当な年のものを利用しても構わない。最初の年を取っても一般性を失わないので B は最初の年のそれを採用する。取引額行列の Y から最初の列を取り出すことで取引額は得られ $(y_{11} \cdots y_{m1})$ となる。n 次ベクトルにおいて i 番目の要素が 1 でそれ以外の要素がすべて 0 であるベクトルを $e_i(n)$ とすれば、

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix} e_1(k) = \begin{pmatrix} e_1(k)' y_1 \\ \vdots \\ e_1(k) y_m \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e_1(k)' & & \\ & \ddots & \\ & & e_1(k)' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$
$$= Hy$$

となる。ここで、H は $e_1(k)'$ を対角要素とする行列であり、

$$H = \begin{pmatrix} e_1(k)' & & \\ & \ddots & \\ & & e_1(k)' \end{pmatrix}$$
$$= e_1(k)' \otimes I_m$$

と表わされ、$m\times mk$ 行列である。$\otimes$ は行列のクロネッカー積である。取引額に　i 番目の年を取りたいときには $e_1(k)$ の代わりに $e_i(k)$ とすればいい。

Y における最初の年度は（1-6）式の左から H を乗ずることによって求めることができ、$Hy = HX_2\omega$ となる。

$$HX_2 = \begin{pmatrix} e_1(k)' X' & & \\ & \ddots & \\ & & e_1(k)' X' \end{pmatrix}$$
$$= (e_1(k)' X') \otimes I_m$$

は $m\times mn$ 行列であり、

$$e_1(k)' X' = (x_{11} \cdots x_{m1})$$

である。（1-8）式において y と Hy を入れ替えれば、

$$\begin{aligned}(l_n' \quad y_{11} \cdots y_{m1})' &= \begin{pmatrix} l_n \\ Hy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_n(m) \\ HX_2 \end{pmatrix}\omega = X_4\omega\end{aligned} \tag{1-9}$$

と表わされる。ここで、$(C_n(m)' \quad (HX_2)')' = X_4$ とおいている。すなわち、

$$X_4 = \begin{pmatrix} C_n(m) \\ HX_2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} I_n & \cdots & I_n \\ e_1(k)' X' & & \\ & \ddots & \\ & & e_1(k)' X' \end{pmatrix}$$

であり、$rank(X_4) = m+n-1$ となる。

未知数を ω とする連立 1 次方程式の（1-9）式において、ω について一意の解が存在するのは X_4 のランクが $m+n-1$ のとき、すなわち mn 個ある配分ウエイトの中で$(m-1)(n-1)$個のウエイトが 0、$m+n-1$ 個のウエイトが 0 でない場合のときである。そのとき、X_4 は正則行列となり逆行列が存在す

るため、(1-9) 式の解ωは、

$$\omega = X_4^{-1}(l_m' \quad (Hy)')'$$

と一意に表すことができる。

1.4　取引額として平均を採用

対応関係のタイプを識別するとき、分類AとBにおける取引額の平均を採用することも可能である。y_iの平均を$\bar{y}_i = l_k' y_i / k$とすれば、

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_k' y_1 \\ \vdots \\ l_k' y_m \end{pmatrix} / k = Gy$$

となる。ここで、Gはm個のl_k'を対角要素とする行列をkで除した行列であり、

$$G = \begin{pmatrix} l_k' & & \\ & \ddots & \\ & & l_k' \end{pmatrix} / k = l_k' \otimes I_m / k$$

と表わされ、$m \times mk$行列である。$(\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_m)' = \bar{y}'$とする。(1-6) 式の左から$G$を乗ずることにより、$Gy = GX_2\omega$となる。$(Xl_k / k)' = (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m)' = \bar{x}'$とすれば、

$$GX_2 = \begin{pmatrix} l_k' & & \\ & \ddots & \\ & & l_k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' & & \\ & \ddots & \\ & & X' \end{pmatrix} / k$$

$$= (Xl_k / k)' \otimes I_m = \bar{x} \otimes I_m$$

は$m \times mn$行列であり、$\bar{y} = GX_2\omega$となる。(1-8) 式においてyとGyを入れ替えれば、

(1-10)　$$\begin{pmatrix} l_n \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_n(m) \\ GX_2 \end{pmatrix} \omega = X_5\omega$$

と表わされる。ここで、$(C_n(m)' \quad (GX_2)')' = X_5$とおいている。$rank(X_5) = m + n - 1$となる。未知数を$\omega$とする連立１次方程式の (1-10) 式において、ωについて一意の解が存在するのはX_5のランクが$m + n - 1$のときであり、(1-10) 式の解ωは、

$$\omega = X_5^{-1}(l_m' \quad \bar{y}')'$$

と一意的に表すことができる。

取引額として最初の年度を採用したときと取引額として平均を採用したときの違いは、連立１次方程式で表わされた (1-9) 式と (1-10) 式の違である。両式の違いは (1-9) 式で使用されているHとX_4であるのに対して、(1-10) 式で使用されているのはGとX_5である。

1.5　対応関係のタイプ識別

実際の対応関係において分類Aの１つの分類コードが分類Bの分類コードの個数であるn個のすべてに対応しているとは必ずしも限らない。このことは、いくつかのω_{ij}が 0 であることを意味しており、(1-9) 式あるいは (1-10) 式において一般的な配分ウエイト行列Wをもとにした配分ウエイトベクトルが考慮されることが必要になる。

商品グループ内の対応関係の中で、0 でないウエイトの個数は、グループ内にある対応関係の結合の手の数の合計に等しい。この情報を利用することによって、$m, n > 1$のときの対応関係のタイプ 4 の中で (1-9) 式あるいは (1-10) 式によってωが一意的に解けるグループとそうでないグループにタイプを識別することができる。X_4のランクを基準にすれば、配分ウエイト行列において 0 でない要素の数がm+n-1 に等しく、その解ωが一意的な解を持つグループを対応関係のタイプ 4a、その解ωが一意的な解をもたないグループを対応関係のタイプ 4b とする。

例えば、取引額として最初の年度を採用して連立方程式の (1-9) 式を基準としたとき、商品グループ内の対応関係においてmとnを共に2とする。配分ウエイトベクトルは、$\omega' = (\omega_{11}\ \omega_{12}\ \omega_{21}\ \omega_{22})$となり、すべての要素が 0 でないとすればその個数は 4 である。(1-9) 式において左辺は$(1 \quad 1 \quad y_{11} \quad y_{21})'$であり、右辺の$X_4$は、

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_{11} & x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{21} \end{pmatrix}$$

となり、$rank(X_4) = 3$である。配分ウエイトベク

トルの個数は 4 であるのに X_4 のランクは 3 となるので両者は一致しない。このことから配分ウエイトベクトルに 0 の要素が存在しないときには対応関係のタイプは 4b となる。

配分ウエイトベクトルの要素の1つを0とおく。ω_{11} を 0 とおいても一般性を失わない。(1-9) 式において左辺は$(1 \quad 1 \quad y_{11} \quad y_{21})'$ であり、右辺の $\omega' = (\omega_{12}\ \omega_{21}\ \omega_{22})$ に対して、

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{21} \end{pmatrix}$$

となり、$rank(X_4) = 3$ である。配分ウエイトベクトルの個数は 3 であり、同時に X_4 のランクは 3 となるので両者は一致する。配分ウエイトベクトルに 0 の要素が 1 個存在するときには対応関係のタイプは 4a となる。

配分ウエイトベクトルの要素の2つを0とおく。ω_{11} と ω_{22} を 0 とおけばグループが 2 つに分割されるのでグループ内の対応関係という仮説に矛盾する。ω_{12} と ω_{21} についても同様である。ω_{11} と ω_{12} を 0 とおけば m が 1、n が 2 となり対応関係のタイプ 2 になる。(1-9) 式の左辺は$(1 \quad 1 \quad y_{11})'$ であり、その右辺は $\omega' = (\omega_{21}\ \omega_{22})$ に対して、

$$X_4' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{11} \\ 0 & 1 & x_{21} \end{pmatrix}$$

となり、$rank(X_4) = 2$ である。配分ウエイトベクトルの個数は 2 であり、同時に X_4 のランクは 2 となるので両者は一致する。対応関係のタイプ 2 は対応関係のタイプは 4a の特殊な状態と解釈される。次に ω_{11} と ω_{21} を 0 とおけば m が 2、n が 1 となり対応関係のタイプ 3 になる。(3-5) 式の左辺は $(1 \quad 1 \quad y_{11} \quad y_{21})'$ であり、その右辺は $\omega' = (\omega_{12}\ \omega_{22})$ に対して、

$$X_4' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x_{21} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix}$$

となり、$rank(X_4) = 2$ である。配分ウエイトベクトルの個数は 2 であり、同時に X_4 のランクは 2 となるので両者は一致する。対応関係のタイプ 3 は対応関係のタイプは 4a の特殊な状態と解釈される。

配分ウエイトベクトルの要素の3つを0とおく。ω_{11} が 0 でないとしても一般性を失わない。そのときは m と n は共に 1 であり、対応関係のタイプ 1 となる。配分ウエイトベクトルの要素は ω_{11} の 1 個から構成される。(1-9) 式において左辺は $(1 \quad y_{11})'$ となり、右辺は ω_{11} に対して $X_4 = (1 \quad x_{11})'$ となるため、そのランクは 1 である。配分ウエイトベクトルの個数と X_4 のランクは一致するので、対応関係のタイプ 1 はタイプ 4a の特殊な状態と解釈される。

取引額として年における平均を採用して (1-10) 式を基準とするときは、上記の X_4 を X_5 に変えることで同じようにして対応関係のタイプを識別できる。すなわち、X_4 における x_{i1} と y_{i1} を X_5 において $\bar{x}_i$ と $\bar{y}_i$ に置き換えることである。

以上のことから商品グループ内の対応関係において分類 A と B における分類コードの数をそれぞれ n と m とするとき、m と n を共に 2 とすれば、対応関係のタイプ 1 から対応関係のタイプ 3 までは配分ウエイトベクトルの解 ω が一意的な解をもつ対応関係のタイプ 4a の特殊な状態である。

2. 対応関係のタイプ識別の具体例

取引額として最初の年度を採用し連立 1 次方程式の (1-9) 式を利用た対応関係の識別の具体例を示す。グループ化された分類 A と分類 B におけるそれぞれの分類コードの個数の n と m がともに 1 より大きく、0 ではない配分ウエイトの個数が m+n-1 のときは対応関係のタイプ 4a である。配分ウエイト行列として、簡単な例を想定して、

$$\text{(2-1)} \qquad W = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

とする。このときの配分ウエイトベクトルは、

$$\omega' = (\ \omega_{11} \cdots \omega_{1n}\ \omega_{21}\ 0 \cdots 0 \cdots \omega_{m1}\ 0 \cdots 0\ )$$

と表わされる。配分ウエイトベクトルの ω から $\omega_{ij} = 0$ の要素を取り除くため、ω の要素を $\omega_{ij} \neq 0$ のときは ω^*、$\omega_{ij} = 0$ のときは ω^{**} となるように分割し、

(2-2) $$P\omega = \omega^p = (\omega^{*\prime} \quad \omega^{**\prime})'$$

となるような変換行列 P を利用する。ここで、

$$\omega^{*\prime} = (\omega_{11} \cdots \omega_{1n}\ \omega_{21} \cdots \omega_{m1})$$

である。ω^{**} は $(m-1)(n-1)$ 個の 0 を要素とするベクトルである。

変換行列 P は以下のような 6 つのプロセスにより作成される。

［１］配分ウエイトベクトルの ω の $\omega_1 \cdots \omega_m$ に対応させて $P_1 \cdots P_m$ とし、$i = 1 \cdots m$ に対して初期値として $P_i = I_n$ とする。

［２］$\omega_1' = (\omega_{11} \cdots \omega_{1n})$ のときは、$j = 1 \cdots n$ のすべての要素が $\omega_{1j} \neq 0$ なので、

$$P_1^* = I_n\text{、}P_1^{**} = \phi$$

とする。ここで、ϕ は P_1^{**} は存在しないことを表している。

［３］$i = 2 \cdots m$ に対して $\omega_{ij} = 0$ ときは P_i から j 行を取り除いて P_i^* とし、取り除いた j 行を P_i^{**} とする。$\omega_i' = (\omega_{i1}\ 0 \cdots 0)$ のときは、$j = 2 \cdots n$ に対して $\omega_{ij} = 0$ となるので、I_n から j 行を取り除けば $e_1(n)$ のみが残り、これが $P_i^* = e_1(n)'$ となる。取り除いた j 行は、

$$P_i^{**} = (e_2(n) \cdots e_n(n))' = (o\ I_{n-1})$$

である。o はすべての要素が 0 であるベクトルでを表している。

［４］$P_1^* \cdots P_m^*$ を対角要素とする行列を P^* とすれば、

$$P^* = \begin{pmatrix} I_n & & & \\ & P_2^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_m^* \end{pmatrix}$$

となり、$(n+m-1) \times mn$ 行列で表わされる。P^{**} を、

$$P^{**\prime} = \begin{pmatrix} O_{m,n-1} & & O_{m,n-1} \\ P_2^{**\prime} & & \\ & \ddots & \\ & & P_m^{**\prime} \end{pmatrix}$$

とすれば、$(m-1)(n-1) \times mn$ 行列となる。

［５］$P' = (P^{*\prime} \quad P^{**\prime})$ とすれば、$mn \times mn$ 行列で表わされる。P の行を適当に並べ変えれば I_{mn} に一致させることができる。この作成された変換行列 P は直交行列である [3]。

ω^* と ω^{**} に分割された ω は（2-2）式から得られる。（1-9）式の右辺において、$\omega^{**} = 0$ を利用すれば、

$$X_4\omega = X_4P'P\omega = XP'\omega^p = X_4P^{*\prime}\omega^*$$

となり、さらに、ω^* は ω から要素が 0 でないものを取り出して作成されたベクトルでなので、

(2-3) $$\begin{pmatrix} l_n \\ Hy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_n(m)P^{*\prime} \\ HX_2P^{*\prime} \end{pmatrix}\omega^*$$

となる。（2-3）式を上下の 2 つに分ければ、上の式はウエイト条件、下の式は配分ウエイトの構造である。ウエイト条件は、

$$C_n(m)P^{*\prime} = (I_n\ e_1(k) \cdots e_1(k))$$

となるので、ω^* のウエイト条件は、

$$C_n(m)P^{*\prime}\omega^* = \begin{pmatrix} \omega_{11} + \cdots + \omega_{m1} \\ \omega_{12} \\ \vdots \\ \omega_{1n} \end{pmatrix} = l_n$$

から、$\omega_{11} + \cdots \omega_{m1} = 1$ と $(\omega_{12} \cdots \omega_{1n}) = (1 \cdots 1) = l_{n-1}'$、と、が得られる。したがって、

$$\omega^* = (\omega_{11} \quad l_{n-1}' \quad \omega_{21} \cdots \omega_{m1})'$$

となる。（2-3）式の下の式から配分ウエイトの構造が得られ、

(2-4) $$Hy = (y_{11} \cdots y_{m1})' = X_2P^{*\prime}\omega^* = \begin{pmatrix} x_{11} \cdots x_{n1} & & & \\ & x_{11} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_{11} \end{pmatrix} w$$

となる。ここで、$w = (\omega_{11} \quad l_{n-1}' \quad \omega_{21} \cdots \omega_{m1})'$ であ

る。(2-4) 式を変形すれば、

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{pmatrix} = x_{11} \begin{pmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{21} \\ \vdots \\ \omega_{m1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{21} + \cdots + x_{n1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。$x_{11} + \cdots + x_{n1} = 1$ なので、これを解いて、

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{21} \\ \vdots \\ \omega_{m1} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{21} + \cdots + x_{n1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) / x_{11} \tag{2-5}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{11} + x_{11} - 1 \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{pmatrix} / x_{11}$$

となる。

商品グループの対応関係のタイプが 4a のときは配分ウエイトベクトルの解は (2-5) 式と $(\omega_{12} \cdots \omega_{1n}) = l_n'$ によって求められ、

$$W = \begin{pmatrix} (y_{11} + x_{11} - 1)/x_{11} & 1 & \cdots & 1 \\ y_{21}/x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1}/x_{11} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2-6}$$

となり、その解は一意的である。配分ウエイト行列を求めるには分類 A と分類 B の取引額の X と Y を共に必要とする。

取引額を年における平均とした (1-10) 式を対応関係における識別の基準にすれば、(1-9) 式のときに利用した H を G に置き換えることで変更可能である。それは、前者における特定年度の取引額である x_{i1} と y_{i1} を後者においては平均の取引額である $\bar{x}_i$ と $\bar{y}_i$ に置き換えることである。

2.1 既知値を考慮した配分ウエイト行列の解

上記の配分ウエイト行列の推計方法は ω_{ij} が 1 となる既知である j 行についても、未知の値として解いている。推計する配分ウエイト行列の W のパラメターの数をできるだけ少なくするには、既知である $\omega_{ij} = 1$ の j 列を取り除くことで可能となる。既知値を考慮した配分ウエイト行列の推計方法は、W を未知の部分と既知の部分に分割し、未知のパラメターをできるだけ少なくして解く方法である。W を ω_{ij} が 1 ではない未知の部分の W^* とそれが 1 となる既知の W^{**} に分割するため、変換行列である Q を利用する。$Q = (Q^* \quad Q^{**})$ に対して、$WQ = (W^* \ W^{**})$ となるような Q を考える。ここで、$W^* = WQ^*$、$W^{**} = WQ^{**}$ であり、Q は直交行列となる。というのは、W において、ω_{ij} が 1 ではない列が a 個存在しそれを $j_1 \cdots j_a$、残りの列を $j_1' \cdots j_{n-a}'$ とする。{ $j_1 \cdots j_a \quad j_1' \cdots j_{n-a}'$ } を適当に並べ変えて {$1 \cdots n$} とすることができるからである。変換行列は、$Q^* = (e_{j_1}(n) \cdots e_{j_a}(n))$ と $Q^{**} = (e_{j_1'}(n) \cdots e_{j_{n-a}'}(n))$ となるので、

$$QQ' = Q^*Q^{*\prime} + Q^{**}Q^{**\prime} = \sum_{i=1}^{n} e_i(n) e_i(n)'$$
$$= I_n$$

が求められる。

(1-4) 式において配分ウエイト行列の W_g を W、$U = O$ と置き換えた式は、

$$Y = WX = WQQ'X = W^* X_1 + W^{**} X_2$$

となる。ここで、$Q^{*\prime} X = X_1$、$Q^{**\prime} X = X_2$ である。

$$Y^{**} = Y - W^{**} X_2 \tag{2-7}$$

とすれば、

$$Y^{**} = W^* X_1 \tag{2-8}$$

となる。W^* はその要素に 1 を持たない配分ウエイト行列である。W^* が $m \times n^*$ 行列になったとすれば、(1-3) 式のウエイト条件は、

$$l_m' W^* = l_{n^*} \tag{2-9}$$

となる。したがって、(2-8) 式を (1-4) 式、(2-9) 式を (1-3) 式と置き換えることにより W^* の解は W と同じようにして求めることができる。

この方法を (2-1) 式に適用すれば、一意的な解である (2-5) 式が求められることを以下に示す。取引額は最初の年度のみを対象とする。すなわち、$Y = WX$ において両辺に右から $e_1(k)$ を乗じた、値

のみを必要とするので、

$$(y_{11}\cdots y_{m1})'=Ye_1(k)=WXe_1(k)$$
$$=W(x_{11}\cdots x_{n1})'$$

となる。(2-1) 式より、W は $W^*=(\omega_{11}\cdots\omega_{m1})'$ と $W^{**}=(e_1(m)\cdots e_1(m))$ に分割され、

(2-10)　$$WQ=\begin{pmatrix}W^* & e_1(m) & \cdots & e_1(m)\end{pmatrix}$$

となる。

ここで注意することは、求めたい配分ウエイト行列は配分ウエイトベクトルになっているため、対応関係がタイプ 2 となっていることである。変換行列の Q は $Q^*=e_1(n)$ と $Q^{**}=(e_2(n)\cdots e_n(n))$ から構成されており、$Q=I_n$ である。$Q^{*}{}'Xe_1(k)=x_{11}$ と $Q^{**}{}'Xe_1(k)=(x_{21}\cdots x_{n1})'$ となるので、(2-7) 式の右辺から $e_1(k)$ を乗ずれば、

$$Y^{**}e_1(k)=Ye_1(k)-W^{**}Q^{**}Xe_1(k)$$
$$=\begin{pmatrix}y_{11}-(x_{21}+\cdots+x_{n1})\\ y_{21}\\ \vdots\\ y_{m1}\end{pmatrix}$$

となり、$x_{11}+\cdots+x_{n1}=1$ を利用すれば、

$$\begin{pmatrix}y_{11}^{**}\\ y_{21}^{**}\\ \vdots\\ y_{m1}^{**}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_{11}+x_{11}-1\\ y_{21}\\ \vdots\\ y_{m1}\end{pmatrix}$$

となる。(2-8) 式の右辺から $e_1(k)$ を乗ずれば、

$$Y^{**}e_1(k)=W^*Q^*Xe_1(k)$$
$$=\begin{pmatrix}\omega_{11}\\ \vdots\\ \omega_{m1}\end{pmatrix}x_{11}$$

となり、これを解いて、(2-5) 式が求められる。

取引額に年の平均をとれば、最初の年度のみを対象とする取引額の x_{i1} と y_{i1} を平均の取引額である $\bar{x}_i$ と $\bar{y}_i$ に置き換えることで可能であり、

$$\begin{pmatrix}\omega_{11}\\ \omega_{21}\\ \vdots\\ \omega_{m1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{y}_1+\bar{x}_1-1\\ \bar{y}_2\\ \vdots\\ \bar{y}_m\end{pmatrix}/\bar{x}_1$$

と表わされる。対応関係のタイプ 4a の中で (2-1) 式で表わされる配分ウエイト行列は既知値を考慮すれば、対応関係のタイプ 2 の形式に変換される。

2.2　対応関係のタイプ 4a のいろいろな状態

対応関係がタイプ 4a のときの簡単な具体例として (2-1) 式を採用したが、それ以外にもいろいろな状態のものが考えられる。。m と n が大きいと形も複雑になりその種類も多くなるので、m と n を共に 3 とする。このとき配分ウエイト行列において対応関係のタイプ 4a は 0 ではない要素が 5 個存在し、(2-1) 式も含めて以下のような 4 つの状態がが考えられる。

（1）最初の配分ウエイト行列の状態は、(2-1) 式において m と n を 3 としたときである。既知値を考慮したときの配分ウエイト行列の解の W^* は (2-5) 式で得られる。この W^* を (2-10) 式へ代入して配分ウエイト行列が求められる。

（2）第 2 番目の配分ウエイト行列の状態は、

(2-11)　$$W=\begin{pmatrix}\omega_{11} & \omega_{12} & 0\\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23}\\ \omega_{31} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

である。この行列は既知値を考慮した配分ウエイト行列の解により ω_{12} と ω_{23} は 1 であり、$W^{**}=(e_1(3)\ \ e_2(3))$ となる。したがって、W は $W^*=(\omega_{11}\ \omega_{21}\ \omega_{m1})'$ と W^{**} に分割され、$WQ=\begin{pmatrix}W^* & W^{**}\end{pmatrix}$ となる。ここで注意することは、(2-9) 式において、求めたい配分ウエイト行列は配分ウエイトベクトルになっているため対応関係がタイプ 2 となっていることである。変換行列は $Q^*=e_1(3)$ と $Q^{**}=(e_2(3)\ \ e_3(3))$ から構成される Q であり、$Q=I_3$ となる。

以下、取引額は最初の年度のみを対象とするが、取引額を平均にしても同じように処理することができる。$Y^{**}e_1(k)=y^{**}$ とする。取引額は、

$$Y^{**}e_1(k)=(y_{11}-x_{21}\ y_{21}-x_{31}\ y_{31})'$$
$$=y^{**}$$

となる。また、$Q^{*}{}'Xe_1(k)=x_{11}$ と $Q^{**}{}'Xe_1(k)=$

$(x_{21} \ \ x_{31})'$ となることから、

$$y^{**} = Ye_1(k) - W^{**}Q^{**}Xe_1(k) = \begin{pmatrix} y_{11}-x_{21} \\ y_{21}-x_{31} \\ y_{31} \end{pmatrix}$$

が求められ、(2-7) 式から $y^{**} = W^{*}Xe_1(k)$ が得られる。

配分ウエイト行列 W^{*} の要素の中から 0 ではない要素を取り出して配分ウエイトベクトルの $\omega' = (\omega_{11} \ \omega_{21} \ \omega_{31})$ とすれば、$W^{*} = \omega$ となる。したがって、(1-9) 式が求められ、

$$(l_1' \quad y^{**}')' = X_4\omega$$

となる。ここで、X_4 は 4×3 行列であり、

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix}$$

と表わされる。$rank(X_4) = 3$ なので、X_4 から第 1 行目を取り除いて X_4^{*}、$(l_1' \quad y^{**}')'$ から第 1 番目の要素を取り除いて y^{***} とする。$X_4^{*} = x_{11}I_3$、$y^{***} = y^{**}$ なので、$y^{**} = X_4^{*}\omega$ が得られる。これを解いて、

$$\omega = \begin{pmatrix} y_{11}-x_{21} \\ y_{21}-x_{31} \\ y_{31} \end{pmatrix} / x_{11} = W^{*} \tag{2-12}$$

となる。この W^{*} を (2-10) 式へ代入することにより配分ウエイト行列が求められる。

（3）第 3 番目の配分ウエイト行列の状態は、

$$W = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & 0 \\ \omega_{21} & \omega_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{33} \end{pmatrix} \tag{2-13}$$

である。この配分ウエイト行列は特別な構造を持っており、

$$W_1 = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}$$

を分類 A の分類コード a_1 と a_2、分類 B の分類コード b_1 と b_2 から構成される配分ウエイト行列、ω_{33} を A の分類コード a_3 と B の分類コード b_3 から構成される配分ウエイトとすれば、(2-13) 式は、

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & o \\ o' & \omega_{33} \end{pmatrix}$$

と表わされ、2 つのグループから構成されていることになる。W_1 は対応関係のタイプ 4b、ω_{33} は対応関係のタイプ 1 である。したがって、(2-13) 式の状態は対応関係のタイプ 4a には属さないことになる。

（4）第 4 番目の配分ウエイト行列は、

$$W = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{2-14}$$

である。この行列は既知値を考慮した配分ウエイト行列の解により ω_{13} は 1 であり、$W^{**} = e_1(3)$ となる。したがって、W は、

$$W^{*} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & 0 \\ 0 & \omega_{32} \end{pmatrix} \tag{2-15}$$

と W^{**} に分割される。このときの変換行列は、$Q^{*} = (e_1(3) \ \ e_2(3))$ と $Q^{**} = e_3(3)$ から構成される Q であり、$Q = I_3$ となる。取引額は、$Q^{*}{}'Xe_1(k) = (x_{11} \ \ x_{21})'$ と $Q^{**}{}'Xe_1(k) = x_{31}$ となることから、

$$y^{**} = Ye_1(k) - W^{**}Q^{**}Xe_1(k) = \begin{pmatrix} y_{11}-x_{31} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix} \tag{2-16}$$

となる。(2-15) 式から W^{*} の要素の中で 0 ではない要素を取り出して配分ウエイトベクトル $\omega' = (\omega_{11} \ \omega_{12} \ \omega_{21} \ \omega_{32})$ とすれば、(1-9) 式が求められ、

$$(l_2' \quad y^{**}')' = X_4\omega$$

となる。ここで、X_4 は 5×4 行列であり、

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

である。$rank(X_4) = 4$ なので、X_4 から第 3 行目

を取り除いて X_4^*、$(l_2' \quad y^{**}{}')'$ から第 3 番目の要素を取り除いて y^{***} とする。(1-9) 式は、

(2-17) $$y^{***} = X_4^* \omega$$

が得られる。ここで $y^{***} = (1 \ 1 \ y_{21}^{**} \ y_{31}^{**})'$ であり、

$$X_4^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21} \end{pmatrix}$$

である。X_4^* は正則行列なので逆行列が存在し、

$$(X_4^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/x_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/x_2 \\ 0 & 0 & 1/x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/x_2 \end{pmatrix}$$

である。(2-17) 式を解けば、

(2-18) $$\omega = \begin{pmatrix} 1 - y_{21}^{**}/x_1 \\ 1 - y_{31}^{**}/x_2 \\ y_{21}^{**}/x_1 \\ y_{31}^{**}/x_2 \end{pmatrix}$$

となる。ω を (2-15) 式に戻せば、W^* は、

$$W^* = \begin{pmatrix} 1 - y_{21}^{**}/x_1 & 1 - y_{31}^{**}/x_2 \\ y_{21}^{**}/x_1 & 0 \\ 0 & y_{31}^{**}/x_2 \end{pmatrix}$$

となる。$l_3' W^* = l_2'$ となることから W^* はウエイト条件を満たしていることがわかる。(2-16) 式から $y_{21}^{**} = y_{21}$、$y_{31}^{**} = y_{31}$ なので、

(2-19) $$W^* = \begin{pmatrix} 1 - y_{21}/x_1 & 1 - y_{31}/x_2 \\ y_{21}/x_1 & 0 \\ 0 & y_{31}/x_2 \end{pmatrix}$$

となる。配分ウエイト行列は、$W = (W^* \ e_1(3))$ として求められる。

2.3　対応関係のタイプ 1

グループ内において分類 A と B の分類コードそれぞれの個数を n と m とするとき、$m = n = 1$ となるのは対応関係のタイプ 1 である。配分ウエイトは ω_{11} しか存在せず、$C_1(m) = 1$ と H=1 なので、(1-9) 式は $X_4' = (1 \quad x_{11})$ となり、

(2-20) $$\begin{pmatrix} 1 \\ y_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{11} \end{pmatrix} \omega_{11}$$

となる。$rank(X_4) = 1$ であり、$m + n - 1$ は 1 となる。配分ウエイトベクトルの数と X_4 のランクは一致するので、対応関係のタイプ 1 は対応関係のタイプ 4a であり、一意の解が存在し、(2-20) 式から $\omega_{11} = 1$ である。対応関係のタイプ 1 はタイプ 4a の特殊解である。

2.4　対応関係のタイプ 2

グループ内で A の分類コードの個数 n が 1 であり、B の分類コードの個数 m が 1 ではないときは対応関係はタイプ 2 である。配分ウエイト行列は、$W = (\omega_{11} \ \omega_{21} \cdots \omega_{m1})'$ となる $m \times 1$ 行列である。配分ウエイトベクトルは、$\omega_1 = (\omega_{11} \ \omega_{21} \cdots \omega_{m1})'$ のみが存在しており、$C_1(m) = (1 1 \cdots 1) = l_m'$ である。また、$HX_2 = x_{11} I_m$ なので、(1-9) 式は、$X_4' = (l_m \quad x_{11} I_m)$ となることから、

(2-21) $$\begin{pmatrix} 1 \\ Hy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_m' \\ x_{11} I_m \end{pmatrix} \omega$$

となる。

配分ウエイトベクトルの要素の個数は m、$rank(X_4) = m$ であり両者は一致する。対応関係のタイプ2はタイプ4aに属しており一意の解が存在する。(2-21) 式の構造式は、$Hy = x_{11} I_m \omega$ となるので、$\omega = Hy / x_{11}$ として一意の解が得られる。さらに、$l_m' \omega = 1$ から、

$$l_m' Hy = y_{11} + \cdots + y_{m1} = x_{11} = 1$$

となる。このことから商品グループの対応関係がタイプ 2 のときの配分ウエイトベクトルは $\omega' = (y_{11} \cdots y_{m1})$ となる。すなわち、$y_{11} \cdots y_{m1}$ は構成比で表わされているため、ω は B の取引額 Y の比率で割り振られることになる。

2.5　対応関係のタイプ 3

グループ内の A の分類コードの個数 n が 1 では

表 2　アジア経済研究所で試みている対応関係における配分ウエイト行列の推計方法

配分構造 / 取引額	対応関係に配分構造なし	対応関係に配分構造あり
取引額を考慮しない	(1) 木下・山田による方法 (2) Comtrade の方法*（*un_c*）	(1) 単純均等配分の方法（*s*） (2) 黒子の均等配分の方法（*k*）
取引額を考慮する	(1) アジ研の *u* 方式*（*u*）	(1) 分類の独立性を仮定した同一配分パターンの方法（*p*）* (2) ウエイト等号制約条件付き最小 2 乗法（*wv, wm*） (3) 制約条件付き最大エントロピー法（*e*） (4) ニューラル･ネットワークの方式（*n*）

（出所）野田容助［2007］の第 3 章の表 1 にもとづき著者作成。

（注）野田［2007］による対応関係のタイプ 4b における配分ウエイト行列の推計方法である。分類 *A* から分類 *B* の方向に対する対応関係に対して、*は分類 *B* のみの取引額を利用することを表わしている。Comtrade 方式とアジ研の *u* 方式は共に推計に当たっては配分構造を考慮しているが、推計結果が 1 つの分類コードに決まることから配分構造なしの分類に入れている。( ) の中の文字は推計方法を簡略化して表わしたものである。

ではなく、*B* の分類コードの個数が m=1 であるときは対応関係のタイプ 3 である。配分ウエイト行列は $W=(\omega_{11}\ \ \omega_{12}\cdots\omega_{1n})$ となる $1\times n$ 行列である。配分ウエイトベクトルは $\omega=(\omega_{11}\ \omega_{12}\cdots\omega_{1n})'$ のみが存在しており $C_n(1)=I_n$ と $HX_2=(x_{11}\cdots x_{n1})$ なので、

$$X_4=\begin{pmatrix} I_n \\ x_{11}\cdots x_{n1}\end{pmatrix}$$

となることから、(1-9) 式は、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ Hy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_n \\ x_{11}\cdots x_{n1}\end{pmatrix}\omega$$

となり、$rank(X_4)=n$ である。配分ウエイトベクトルの個数は n なので X_4 のランクに一致する。対応関係のタイプ 3 はタイプ 4a に属しており一意の解が存在し、$C_1(n)\omega=\omega=l_n$ が得られる。商品グループの対応関係のタイプ 3 のウエイトはすべて 1 となる $W=(1\quad\cdots\quad 1)=l_n'$ で表わされる。

2.6　対応関係のタイプ 4b

グループ内において *A* と *B* の分類コードそれぞれの個数を n と m とするとき、m と n が共に 1 より大きく、しかも配分ウエイト行列の 0 でない要素の個数が $m+n-1$ でないときはグループの対応関係はタイプ 4b である。連立方程式の（1-9）式あるいは (1-10) 式において、その解である ω は一意的な解を持たない。そのため、配分ウエイト行列の推計には、詳細分類コードに基づく単純均等配分の方法、制約条件付き最小 2 乗法、分類間の独立を仮定した同一パターンの方法、制約条件付き最大エントロピー法による繰り返しの比例反復法、ニューラルネットワークの方法等の方法があり、これらを利用して解を求めなければならない。野田［2007］は対応関係のタイプ 4b のときの配分ウエイト行列についていくつかの推計方法を紹介し、貿易データを変換した結果を比較している。

表 2 にアジア経済研究所で試みている配分ウエイト行列の推計方法が示されている。推計方法は取引額を考慮するかどうか、対応関係に配分構造があるかどうかを基準にして分けることができる。これらの推計方法の中で野田［2007］は貿易データの特徴や推計プログラムの難易度等を考慮すれば、現在のところ（2007 年 1 月）分類間の独立性

を仮定した同一配分パターンの方法（p 方式）が現実的で最良の方法であると結論付けている。

3.　貿易データの変換とその評価

貿易データを変換するためには配分ウエイト行列を推計しなければならない。本節ではその推計方法として現在のところ現実的で最良の方法と考えられる分類間の独立性を仮定した同一パターンの方法（p 方式）を採用する。まず最初に、一意的な解をもつ対応関係のタイプ 4a から構成される配分ウエイト行列に対して p 方式を適用すればどれだけの誤差が生じるかを確かめる。例えば、配分ウエイト行列が $m \times n$ 行列とするとき、配分ウエイト行列の例として、(2-1) 式で表わされる状態を採用する。そのときの配分ウエイト行列を $\hat{W}^{(4a)}$ とすれば、一意的な解として得られ、(2-6) 式で表わされる。したがって、変換された貿易データは、$Y^* = \hat{W}^{(4a)} X^*$ となる [4] 。取引額として平均を採用する。この式の右から l_k / k を乗じれば、$X^* l_k / k = \bar{x}^*$ なので、

(3-1)
$$\bar{y}^* = Y^* l_k / k = \hat{W}^{(4a)} X^* l_k / k$$
$$\hat{W}^{(4a)} \bar{x}^*$$

となる。

p 方式では配分ウエイト行列は (1-2) 式の Y の平均値を利用して、

(3-2)
$$\hat{W}^p = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & 1 & \cdots & 1 \\ \bar{y}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{y}_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

と一意に表わされる [5] 。分類 A の取引額を X^* として、配分ウエイト行列に基づく貿易データの変換により分類 B の取引額が $\hat{Y}^p$ になったとすれば、$\hat{Y}^p = \hat{W}^p X^*$ となる。取引額の平均値を採用しているので、この式の右から l_k / k を乗じて、

$$\hat{y}^p = \hat{Y}^p l_k / k = \hat{W}^p X^* l_k / k = \hat{W}^p \bar{x}^*$$

となる。したがって、変換された $\hat{y}^p$ と元の $\bar{y}^*$ との間の誤差は、

$$\hat{y}^p - \bar{y}^* = (\hat{W}^p - \hat{W}^{(4a)}) \bar{x}^*$$

(3-3)
$$= \begin{pmatrix} 1 - \bar{y}_1 \\ -\bar{y}_2 \\ \vdots \\ -\bar{y}_m \end{pmatrix} \bar{x}_1^* (1 - \bar{x}_1) / \bar{x}_1$$

として求められる。$\bar{y}_1 + \cdots + \bar{y}_m = 1$、も満たされるので $l_m'(\hat{y}^p - \bar{y}^*) = 0$ となることから、変換された貿易データの総額は $\bar{y}^*$ を真の解とすれば、p 方式による解の $\hat{y}^p$ と同一である。しかしそれぞれの要素については (3-3 式で表わされたような誤差が生じている。

ベクトル y において要素の絶対値の和を、$\| y \|_a = | y_1 | + \cdots + | y_n |$ とする。(3-3) 式の絶対誤差は、

(3-4)
$$\| \hat{y}^p - \bar{y}^* \|_a = 2(1 - \bar{y}_1)(1 - \bar{x}_1) \bar{x}_1^* / \bar{x}_1$$

で表わされる。対応関係がタイプ 4a のとき、p 方式による絶対誤差は (3-4) 式で表わされる。(3-4) 式が 0 のとき、$\bar{y}_1 = 1$ または $\bar{x}_1 = 1$ である。

前者のみが成り立つとき、すなわち、$\bar{y}_1 = 1$ が成り立つときは、$\bar{y}_2 = \cdots = \bar{y}_n = 0$ である。(3-1) 式は、$\bar{x}_1^* + \cdots + \bar{x}_n^* = c$ とすれば、

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_1^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{W}^p \bar{x}^* = \begin{pmatrix} \omega_{11} \bar{x}_1^* + \bar{x}_2^* \cdots + \bar{x}_n^* \\ \omega_{21} \bar{x}_1^* \\ \vdots \\ \omega_{m1} \bar{x}_1^* \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \omega_{11} \\ \vdots \\ \omega_{m1} \end{pmatrix} \bar{x}_1^* + e_1(m)(c - \bar{x}_1^*)$$

となる。この式から、$\bar{y}_1^* = \omega_{11} \bar{x}_1^* + c - \bar{x}_1^*$ と $\omega_{21} = \cdots = \omega_{m1} = 0$ が得られる。$\bar{y}_1^* + \cdots + \bar{y}_m^* = c$ であり、$\bar{y}_2 = \cdots = \bar{y}_n = 0$ なので、$\bar{y}_1^* = c$ となる。したがって、$\omega_{11} \bar{x}_1^* = \bar{y}_1^* - c + \ \bar{x}_1^* = \bar{x}_1^*$、となり、$\omega_{11} = 1$ となる。(2-1) 式を採用していたので、$\omega_{12} = \cdots = \omega_{1n} = 1$ である。したがって、$\hat{W}^p = l_n'$ となり、対応関係はタイプ 3 である。

後者のみが成り立つとき、すなわち、$\bar{x}_1 = 1$ が成り立つときは、$\bar{x}_2 = \cdots = \bar{x}_n = 0$ であり、$\bar{x}_1^* = c$

表3　対応関係のタイプとその推計された配分ウエイト行列

対応関係のタイプ 項目	タイプ1	タイプ2	タイプ3	タイプ4a	タイプ4b
m n $rank(X_4)$	1 1 1	m 1 m	1 n n	m n m+n+1	m n m+n+1 ではない
$\hat{W}^{(i)}$	$\omega_{11}=1$	$\begin{pmatrix}\omega_{11}\\ \vdots \\ \omega_{m1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_{11}\\ \vdots \\ y_{m1}\end{pmatrix}=y$	$(\omega_{11}\cdots\omega_{1n})$ $=l_n'$	a	表2を参照
$\hat{W}^p$	同上	同上	同上	b	p 方式

（出所）筆者作成

(注)配分ウエイト行列を$m\times n$行列とする。$\hat{W}^{(i)}$は対応関係のタイプがiのときに推計された配分ウエイト行列、$\hat{W}^p$はp方式により推計された配分ウエイト行列である。aはmとnが共に3のとき、配分ウエイト行列が（2-1）式で表わされるとき、その解は（2-16）式、または（2-10）式のW^*と（2-9）式、（2-11）式は（2-12）式のW^*と（2-9）式、（2-13）式はW^*と（2-9）式で表わされる。bは対応関係の状態を（2-1）式とすれば、（3-2）式の$\hat{W}^p$である。

と$\bar{x}_2^*=\cdots=\bar{x}_n^*=0$、になる。（3-2）式は、

$$\bar{y}^*=W^p(\bar{x}_1^*\ \ 0\ \cdots\ 0)'$$
$$=\begin{pmatrix}\omega_{11}\\ \vdots \\ \omega_{m1}\end{pmatrix}c$$

となる。この式から、

$$\hat{W}^p=(\omega_{11}\ \cdots\ \omega_{m1})'=\bar{y}^*/c=\bar{y}$$

となり、$\hat{W}^p=\bar{y}$が求められる。したがって、対応関係はタイプ2である。

両者が成り立つとき、$\bar{y}_1=1$と$\bar{x}_1=1$であるときは、$\bar{y}_1^*=c$と$\bar{x}_1^*=c$になり、

$$\begin{pmatrix}\bar{y}_1^*\\ 0 \\ \vdots\end{pmatrix}=W^p(\bar{x}_1^*\ \ 0\ \cdots\ 0)'$$
$$=\begin{pmatrix}\omega_{11}\\ \vdots \\ \omega_{m1}\end{pmatrix}\bar{x}_1^*$$

となる。$\bar{y}_1^*=\omega_{11}\bar{x}_1^*$なので、$\omega_{11}=1$となる。対応関係はタイプ1である。

以上のことをまとめたのが表3であり、対応関係のタイプ、mとnの大きさ、X_4のランク、推計された配分ウエイト行列の解が示されている。

（1）表3によれば、対応関係がタイプ3のときの配分ウエイト行列を$W^{(3)}$とすれば、$W^{(3)}=l_n'$である。p方式で推計された配分ウエイト行列も$\hat{W}^p=l_n'$であるので、両者は一致する。配分ウエイト行列が同一なので変換された貿易データも一致する。

（2）対応関係がタイプ2のときの配分ウエイト行列を$W^{(2)}$とすれば、$W^{(2)}=\bar{y}'$である。それに対してp方式で推計された配分ウエイト行列も、$\hat{W}^p=\bar{y}'$であり、両者は一致し、変換された貿易データも一致する。

（3）対応関係がタイプ1のときの配分ウエイト行列を$W^{(1)}$とすれば、$W^{(1)}=1$である。それに対してp方式で推計された配分ウエイト行列も$\hat{W}^p=1$であり、両者は一致し、変換された貿易データも一致する。

（4）対応関係がタイプ4aのときの配分ウエイト行列を$W^{(4a)}$とすれば、推計値は（2-6）式で表わされ、それに対してp方式で推計された配分ウエイト行列は（3-2）式で表わされる。両者は一致せ

ず、変換された貿易データの誤差は（3-4）式で表わされる。

3.1　改訂された *p* 方式による推計

配分ウエイト行列を p 方法で推計するとき、応関係のタイプ 4a の配分ウエイトっ行列では変換された貿易データに（3-3）式で示された誤差が生じる。この誤差を 0 にするための方法が p 方式の改訂版である。改訂版は（3-1）式から得られる取引額行列の $V^{(0)} = \hat{W}^{p} D(\bar{x}^*)$ を初期値とする配分額行列と周辺和の条件のもとでエントロピーを最大にするように求める方法である。配分ウエイト行列を $V = WD(\bar{x}^*)$ とする。$D(\bar{x}^*)$ は $\bar{x}^*$ を対角要素とする対角行列を表す。周辺和の条件というのは推計された V が、

(3-5)　$l_m{}'V = \bar{x}^*{}',\ Vl_n = \bar{y}^*$

となることをいう。野田［2007］によれば配分額行列の初期値と周辺和の条件のもとでエントロピーを最大にするため方法は以下のようになる。配分額行列の初期値を $V^{(0)}$ 、任意のパラメターを $\xi' = (\xi_1 \cdots \xi_m)$ と $\zeta' = (\zeta_1 \cdots \zeta_n)$ とすれば、配分額行列の推計値は、

(3-6)　$V = D(\xi)V^{(0)}D(\varsigma)$

で求められる。ここで、$\xi = D\{V^{(0)}\varsigma\}^{-1}\bar{y}^*$ と $\varsigma = D\{V^{(0)}{}'\xi\}^{-1}\bar{x}^*$ である。この解は逐次解により求めることができる。

正の実数を要素として持つ任意の $m \times n$ 行列を $V^{(k)}$ とする。$k = 0,1,2,\cdots$ である。初期値として $\xi_0 = l_m$ 、$V^{(0)}$ として、k に対して繰り返し計算をおこなう。まず最初に、$k = 1$ として、

(3-7)　$\varsigma_k = D\{V^{(0)}{}'\xi_{k-1}\}^{-1}\bar{x}^*$

(3-8)　$\xi_k = D\{V^{(0)}\varsigma_k\}^{-1}\bar{y}^*$

を 1 組として計算する。k を 1 つずつ増やしながら（3-7）式と（3-8）式の繰り返し計算を続け、$l_m{}'|\xi_{k+1} - \xi_k|$ がある値より小さくなったところで収束したとして計算を終了する。この収束した解は一意的に定まる。推計したい配分額行列はこのときの k に対して、

(3-9)　$V^{(k)} = D(\xi_k)V^{(0)}D(\varsigma_k)$

として求めることができる。（3-5）式を周辺和としているため、を（3-9）式において、

(3-10)　$l_m{}'V^{(k)} = \bar{x}^*{}',\ V^{(k)}l_n = \bar{y}^*$

が得られる。配分ウエイト行列は、

(3-11)　$\hat{W}^{e} = V^{(k)}D(l_m{}'V^{(k)})^{-1}$

として得られる。このようにして制約条件付きの最大エントロピー法により求める方法を e 方式という [6] 。

改訂版の p 方式は初期値となる配分額行列を $V^{(0)} = \hat{W}^{p}D(\bar{x}^*)$ として設定し、(3-9) 式を求め、さらに（3-11）式により配分ウエイト行列を求めることで得られる。変換された貿易データを $\hat{y}^e = \hat{W}^e\bar{x}^*$ とすれば、(3-10) 式と (3-11) 式より、

(3-12)　$\hat{y}^e = \hat{W}^e D(\bar{x}^*)l_n = V^{(k)}D(\bar{x}^*)^{-1}D(\bar{x}^*)l_n = \bar{y}^*$

となる。$\hat{y}^e - \bar{y}^* = o$ となり誤差がなくなったことを確認できる。

配分ウエイト行列 W において、要素が 0 のときは 0、それ以外は 1 と置き換える関数を $a(W)$ とする。野田［2010］によれば、初期値となる配分額行列を $V^{(0)} = a(\hat{W}^p)$ として設定することによっても改訂版の p 方式により同一の $\hat{W}^e$ を求めることができる。同じことであるが、初期値として配分ウエイト行列の単純均等配分法により得られた $\hat{W}^s$ としても同一の $\hat{W}^e$ が求められる [7] 。

3.2　改訂された *p* 方式の評価

対応関係がタイプ 4a のときは（2-6）式を基準とする一意の解が得られるため、p 方式による誤差は（3-3）式あるいはその絶対誤差である（3-4）式で評価できる。ところが対応関係がタイプ 4b のときは (2-6) 式を基準とする一意の解が存在しないため p 方式とその改訂版の評価が厄介である。本節では一様乱数によって擬似的な真の配分ウエイト行列 $W^{(0)}$ を作成し、分類 A の取引額の平均

表4　配分ウエイト行列の大きさが 23×19 行列であり、ξ を 0.10 としたときの推計誤差の比較

Q	e_1	e_2	d	n	c	Q	e_1	e_2	d	n	c
1	6.594627	6.511426	0.083200	42	0.0961	24	7.809159	7.579065	0.230094	48	0.1098
2	7.128160	7.039217	0.088943	38	0.0869	25	7.366195	7.320453	0.045742	40	0.0915
3	6.956072	6.843678	0.112394	37	0.0846	26	7.782614	7.749425	0.033189	47	0.1075
4	7.924920	7.823361	0.101559	54	0.1235	27	8.017900	7.933967	0.083932	41	0.0938
5	7.318393	7.264356	0.054036	45	0.1029	28	7.666815	7.649874	0.016940	41	0.0938
6	6.986613	6.995585	−0.008972	43	0.0983	29	7.032785	6.927173	0.105612	51	0.1167
7	7.727064	7.645732	0.081332	56	0.1281	30	7.433648	7.302164	0.131483	34	0.0778
8	7.457274	7.449040	0.008234	41	0.0938	31	7.348059	7.115642	0.232416	60	0.1372
9	7.190377	7.039736	0.150640	43	0.0983	32	7.585140	7.349298	0.235842	40	0.0915
10	7.353424	7.231174	0.122249	37	0.0846	33	7.393032	7.297329	0.095702	43	0.0983
11	7.636600	7.491118	0.145482	40	0.0915	34	7.700634	7.632550	0.068084	38	0.0869
12	7.015809	6.942359	0.073449	39	0.0892	35	7.745898	7.568598	0.177299	37	0.0846
13	7.659236	7.584739	0.074496	45	0.1029	36	7.114809	6.999089	0.115719	49	0.1121
14	7.034611	6.879942	0.154668	42	0.0961	37	7.270423	7.147797	0.122625	35	0.0800
15	7.148890	7.018572	0.130317	35	0.0800	38	8.155999	8.050734	0.105265	48	0.1098
16	7.265208	7.188696	0.076512	41	0.0938	39	7.283156	7.079134	0.204022	47	0.1075
17	7.790802	7.771469	0.019332	35	0.0800	40	7.660550	7.574456	0.086093	37	0.0846
18	7.503783	7.338853	0.164929	48	0.1098	41	6.951962	6.781498	0.170464	43	0.0983
19	7.431443	7.311988	0.119454	54	0.1235	42	7.865088	7.696697	0.168391	36	0.0823
20	7.145692	7.068857	0.076835	47	0.1075	:					
21	7.203960	7.120773	0.083187	58	0.1327	98	7.875960	7.891155	−0.015194	46	0.1052
22	7.781108	7.791697	−0.010589	41	0.0938	99	7.460318	7.383758	0.076560	49	0.1121
23	7.353196	7.314435	0.038761	52	0.1189	100	6.806922	6.768081	0.038840	46	0.1052

（出所）著者作成

（注）Q は一連番号、e_1 は分類間に独立を仮定した同一パターンの方法による誤差、e_2 はその改訂版による誤差を表す。d は $e_1 - e_2$、n は 0 を要素とする個数、c は n の割合を表している。

を $\bar{x}^*$ として、$\bar{y}^* = W^{(0)}\bar{x}^*$ から分類 B の取引額の平均を推計する。既存の $\bar{x}^*$ と $\bar{y}^*$ から p 方式による配分ウエイト行列の推定値 $\hat{W}^p$ とその改訂版による配分ウエイト行列の推定値 $\hat{W}^{pe}$ を求める。両者のうちどちらが $W^{(0)}$ に近似しているかで評価を試みる。

［1］（0,1）を範囲とする一様乱数を mn 個発生させ、ξ より小さな値を 0 とする [8]。この乱数の列を要素とする $m \times n$ 行列を取引額の初期値として $V^{(0)}$ とする。配分ウエイト行列を、

$$W^{(0)} = V^{(0)} D(l_m' V^{(0)})^{-1}$$

とする。対応関係のタイプ 4b を対象としているので配分ウエイト行列において 0 ではない要素の個数は $m+n$-1 より大きいことが必要である。

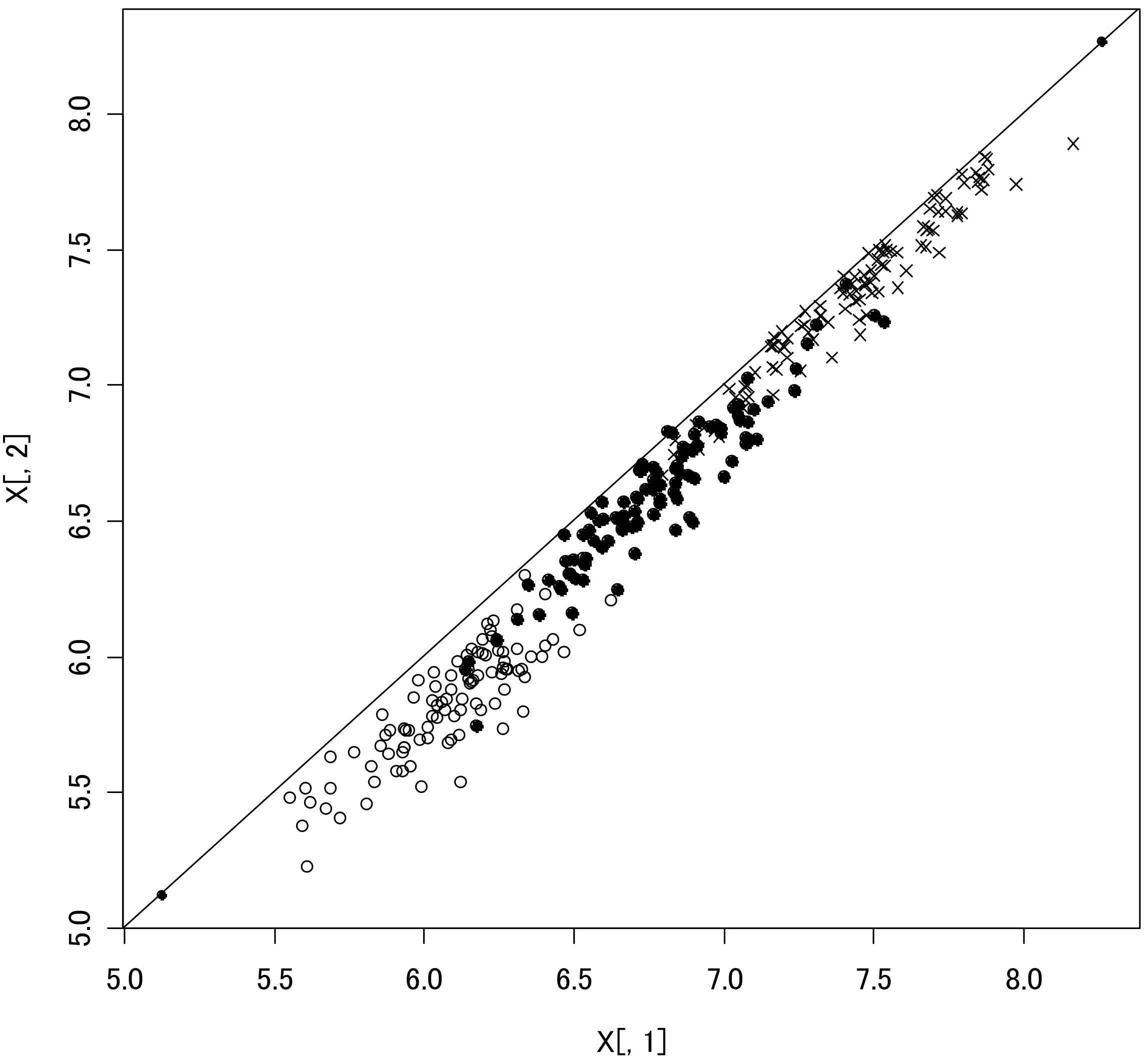
［2］分類 B の取引額の平均値を $\bar{y}^* = W^{(0)}\bar{x}^*$ として推計する。

［3］取引額の平均の $\bar{x}^*$ と $\bar{y}^*$ を基にして p 方式による配分ウエイト行列の推定値である $\hat{W}^p$ を作成する。分類 B へ変換された取引額の平均を $\hat{y}^p = \hat{W}^p \bar{x}^*$ とする。

［4］$\hat{W}^p$ を取引額表の初期値とする改訂された p 方式の推計値である $\hat{W}^{pe}$ を（3-11）式から求める [9]。分類 B へ変換された取引額の平均を $\hat{y}^{pe} = \hat{W}^{pe}\bar{x}^*$ とする。

［5］p 方式とその改訂版のそれぞれの誤差は $e_1 = \| \hat{y}^p - \bar{y}^* \|_a$ と $e_2 = \| \hat{y}^{pe} - \bar{y}^* \|_a$ で表わされる。

図２　分類間の独立を仮定した同一パターンの方法（p 方式）とその改訂版の誤差の違い（0 の要素の違い）

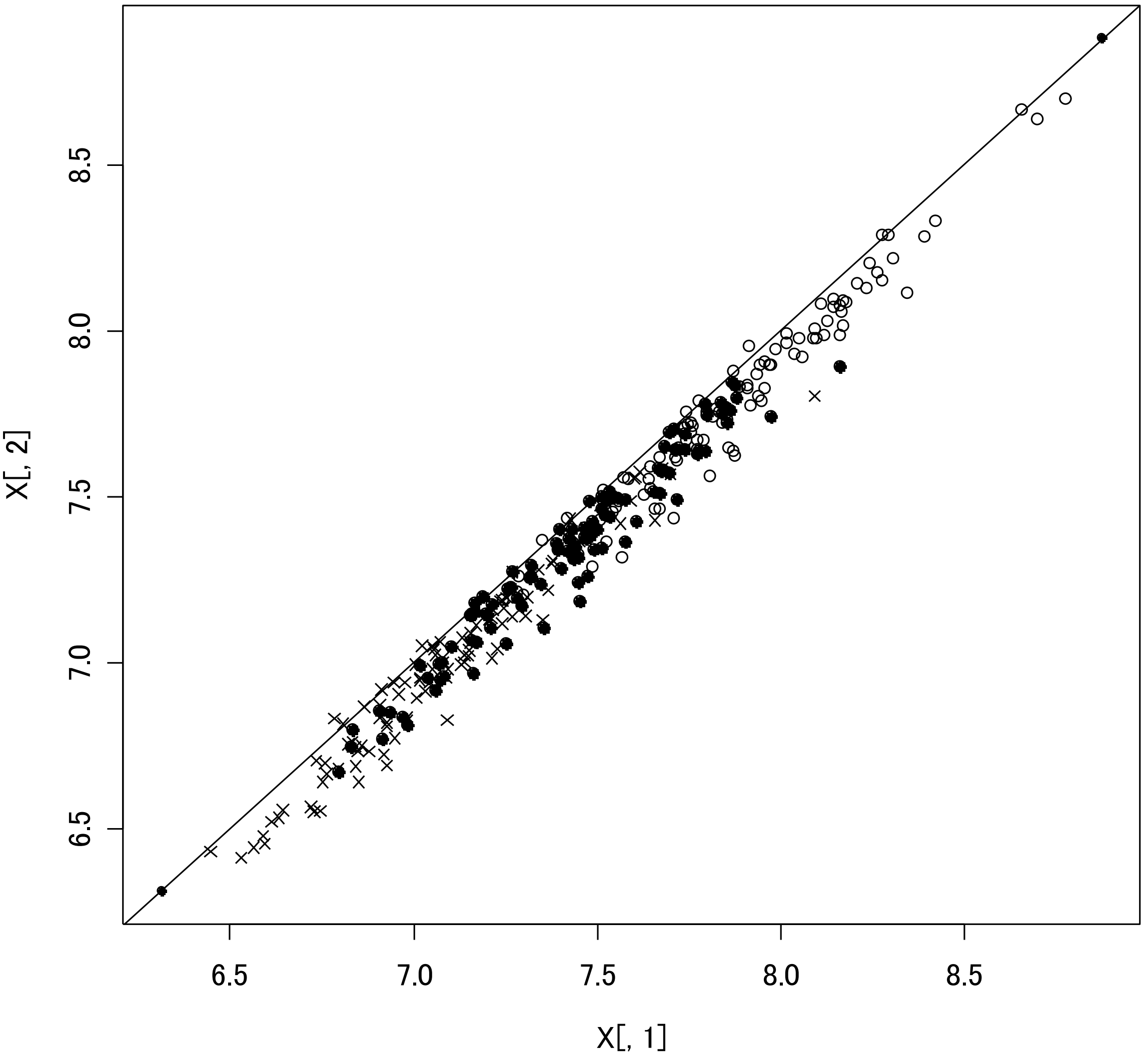


（出所）著者作成

（注）x 軸は p 方式による誤差（X[,1]で表わされる）、y 軸はその改訂版による誤差（X[,2]）である。配分ウエイト行列は 23×19 行列である。×は（0,1）を範囲とする一様乱数において 0.10 以下を 0、●は 0.15 以下を 0、○は 0.20 以下を 0 とした配分ウエイト行列である。

表 4 は配分ウエイト行列の大きさを 23×19 行列として、ξ を 0.10 としたときに上記の繰り返し計算を 100 回行ったときの結果を示したものである。Q は一連番号、e_1 は p 方式による誤差、e_2 はその改訂版による誤差を表す。d は $e_1 - e_2$、n は 0 を要素とする個数、c は n の 23×19（=437）に対する割合を表している。紙面の都合から一連番号の 87 から 97 までは省略している。p 方式の e_1 がその改訂版の e_2 より小さいのは、$e_1 - e_2 < 0$ となることで示され、表 4 において 4 個存在する。それは一連番号では 6、22、45、98 である。c の平均は 0.10156 であり、一様乱数から 0.10 の割合で

図３　分類間の独立を仮定した同一パターンの方法とその改訂版の誤差の違い（行列の大きさの違い）



（出所）著者作成

（注）x 軸は p 方式による誤差（X[,1]）、y 軸はその改訂版による誤差（X[,2]）である。×は配分ウエイト行列が 22×18 行列、●は 23×19 行列、○は 24×20 行列である。（0,1）を範囲とする一様乱数において p が 0.10 以下を 0 とした配分ウエイト行列としている。

0 を作りだした方法をちゃんと反映している。

図 2 は表 4 における e_1 を x 軸、e_2 を y 軸として図示したものであり、表 4 に示された ξ が 0.10 の他に同じ行列の大きさに対して ξ が 0.15 と 0.20 も処理を 100 回繰り返した結果が図示されている。e_1 を x 軸、e_2 を y 軸として図示したものである。すなわち、この図では m は 23、n は 19、ξ については、×は 0.10、●は 0.15、○は 0.20 としている。評価基準である配分ウエイト行列の作成において ξ の値が大きいほど 0 となる要素の個数が増えることになる。図 2 は行列の大きさが同じとき、0 の数の違いによって同一パターンの方法とその

図 4　商品グループ内における分類 A の a_1, a_2 から分類 B の方向に対する配分構造

分類Aの取引構造 X	分類 A	配分構造とウエイト(ω_{ij})	分類 B	分類Bの取引構造 Y
$x_2' = (x_{21} \cdots x_{2h})$ $x_1' = (x_{11} \cdots x_{1h})$	a_2 a_1		b_1 b_2 $\vdots$ b_m	$y_1' = (y_{11} \cdots y_{1h})$ $y_m' = (y_{m1} \cdots y_{mh})$

（出所）図 1 に同じ。

改訂版の間で誤差がどのように違うかを示したものである。対角線より右に位置する点は改訂版の方が p 方式より誤差が少ない状態を表している。対角線より左に位置する点はその逆であることを表している。図 2 において多くの点が対角線より右に位置していることが確かめられ、行列の大きさが同一のときは ξ の値にかかわらず改訂版の方が誤差が少ないことがわかる。改訂版の方が ξ 方式に比べて誤差が大きいのは ξ が 0.10、0.15、0.20 に対してそれぞれ 4、1、0 個である。

図 3 は ξ を 0.10 と固定したとき、配分ウエイト行列の大きさにより ξ 方式とその改訂版の誤差にどのような違いが生じるかを比較したものである。×は配分ウエイト行列が 22×18 行列、●は 23×19 行列、○は 24×20 行列である。図 3 においても多くの点が対角線より右に位置していることが確かめられ、ξ の値が同一のときは行列の大きさにかかわらず改訂版の方が誤差が少ないことがわかる。改訂版の方が p 方式に比べて誤差が大きいのは行列の大きさが 24×20、23×19、22×18 の行列に対してそれぞれ 7、5、9 個である。

3.3　対応関係のタイプ 4a とタイプ 2 の違い

分類 A から B の方向に対する対応関係コード表が対応関係のタイプ 4a とする。n を 2 として、図 4 のような実線と波線の両方を含んだ対応関係を持つ配分構造になっているとする。この配分構造を持つ対応関係コード表は対応関係の基本モデルである。図 4 において A の a_2 と B の b_1 を切断の要素とする対応関係コード表における切断モデルを考える。この切断モデルは図 4 においては破線を取り除いて得られる対応関係コード表となり、対応関係のタイプ 2 となる。対応関係の基本モデルにおいて得られる A の a_1 における配分ウエイトベクトルの最大値は、切断モデルのそれの最大値とは要素の順番が必ずしも同一ではないことを示す。

取引額を最初の年とすれば、対応関係のタイプ 4a の配分ウエイト行列は（2-6）式で表わされ、既知値を考慮したときの配分ウエイト行列は配分ウエイトベクトルとなり（2-5）式で求められる。A の a_1 は B の $b_1 \cdots b_m$ のすべてに対して配分構造を持ち、これを、

$$\text{(3-13)} \qquad \hat{\omega}^{(4a)} = \begin{pmatrix} (y_{11} + x_{11} - 1) / x_{11} \\ y_{21} / x_{11} \\ \vdots \\ y_{m1} / x_{11} \end{pmatrix}$$

とする。A の a_1 における取引額は x_{11}^* なので、変換された B の $b_1 \cdots b_m$ における取引額は $y^{(4a)*} = \hat{\omega}^{(4a)} x_{11}^*$ となる。切断モデルは対応関係のタイプ 2 なのでその配分ウエイトベクトルは、

$$\text{(3-14)} \qquad \hat{\omega}^{(2)} = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{pmatrix}$$

となる。変換された B の取引額は $y^{(2)*} = \hat{\omega}^{(2} x_{11}^*$ と

なる。取引額の$y^{(4a)*}$と$y^{(2)*}$の比較は配分ウエイトベクトルの$\omega^{(4a)}$と$\omega^{(2)}$の比較と同じなので、これを比較する。(3-13) 式は (3-14) 式を利用して、

$$\hat{\omega}^{(4a)} = \hat{\omega}^{(2)} / x_{11} - \begin{pmatrix} c \\ o_3 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、$c = (1 - x_{11}) / x_{11}$、$o_m$は$m$次の0を要素とするベクトルである。

（1）$\omega^{(2)}$の要素の中で最大のものをi番目の要素である$\omega_i^{(2)}$（$i \neq 1$）とすれば、$j = 1 \cdots m$に対して、

$$\omega_i^{(2)} = y_{i1} \geq y_{j1} = \omega_j^{(2)}$$

となる。等号は$j = i$である。この両辺をx_{11}で除すれば、$y_{i1} / x_{11} \geq y_{j1} / x_{11}$となるので、$j \neq 1$に対して、$\omega_i^{(4a)} \geq \omega_j^{(4a)}$となる。また、$c > 0$となることから$\omega_i^{(4a)} \geq \omega_1^{(4a)}$となる。したがって、$\omega^{(4a)}$の要素の中で最大のものは$\omega^{(2)}$と同じ$i$番目の要素である$\omega_i^{(4a)}$となる。

（2）$\omega^{(2)}$の要素の中で最大のものを最初の要素の$\omega_1^{(2)}$、2番目のものをk番目の要素の$\omega_k^{(2)}$とする。

$$y_{11} / x_{11} - c < y_{k1} / x_{11}$$

となるkが存在すれば、$\omega^{(4a)}$の要素の中で最大のものは$\omega^{(2)}$と異なる順位となるk番目の要素の$\omega_k^{(4a)}$となる。そうではないときは最大のものは$\omega_1^{(4a)}$である。

おわりに

異なる分類体系をもつ2つの分類AとBがあり、AからBへの方向をもった対応関係に相互に関係があるとき閉じた対応関係のグループを作ることができる。そのグループ内においてAからBへの変換のための配分構造式は (1-4) 式で与えられ、そのときの一般的な配分ウエイト行列はW_gである。そのウエイト条件は (1-3) 式で表すことができる。また、グループ化された対応関係における分類Aから分類Bに対する基本な対応関係のタイプとしてタイプ1、タイプ2、タイプ3、タイプ4の4つのタイプに分割することができる。

一般的な配分ウエイト行列による配分構造の考えを基礎にすれば、タイプ4はさらに配分ウエイト行列が一意的な解を持つタイプ 4a とそうではないタイプ4bに分割することが可能である。しかもタイプ1からタイプ3まではタイプ4aの特殊な場合として位置付けることができる。

対応関係のタイプ 4a のときの配分ウエイト行列は$m \times n$行列で表わされ、配分ウエイト行列の状態が (2-1) 式のときは取引額を最初の年度とすれば推計された配分ウエイト行列の$\hat{W}^{(4a)}$は (2-6) 式で表わされる。対応関係のタイプ3のときの配分ウエイト行列は$1 \times n$行列、すなわち横ベクトルで表わされ、$\hat{W}^{(3)} = (1 \ \cdots \ 1)$となる。対応関係のタイプ2のときの配分ウエイト行列は$m \times 1$行列、すなわち縦ベクトルで表わされ、取引額を最初の年度とすれば、$\hat{W}^{(2)\prime} = (y_{11} \cdots y_{m1})$となる。対応関係のタイプ1のときの配分ウエイト行列は1×1の行列、すなわちスカラーで表わされ、$\hat{W}^{(1)} = 1$となる。

対応関係のタイプ 4a の配分ウエイト行列では現時点では現実的で最良な方法はp方式であるが、この方式で変換された貿易データには (3-3) 式で示された誤差が生じる。この誤差をなくすための方法がp方式の改訂版である。改訂版は (3-1) 式から得られる取引額行列の$V^{(0)} = \hat{W}^{p} D(\bar{x}^*)$を初期値とする配分額行列と周辺和の条件のもとで最大エントロピー法により求める方法である。

1　確率過程$\{y_t\}$が定常状態であるとは、すべてのtに対して平均が$E(y_t) = \mu$、分散が$E(y_t - \mu)^2 = \gamma(0)$、自己共分散が、$E\{(y_t - \mu)(y_{t-\tau} - \mu)\} = \gamma(\tau)$となることである。一般的に時刻$t$における確率過程の

平均は時刻を t とするとき、$\mu_t = E(y_t)$ で表わされる。これは確率変数 y_t の可能なすべての実現値についての平均であり、時刻 t において m 系列の観測値が得られるとき、平均値の推定値は

$$\hat{\mu}_t = (y_t^{(1)} + \cdots y_t^{(m)}) / m$$

となる。しかし、時系列データにおいて観測されるのは単一系列のみであり、このままの状態では $\hat{\mu}_t$ を計算することは不可能である。この場合には $\hat{\mu}_t = \mu$ であれば観測値の時間的平均により μ を推計することが可能となる。すなわち、 y_t の平均値が時刻 t に依存しないことである。$\{y_t\}$ がすべての t に対して平均や分散、自己共分散が求められ、上記の条件が満たされるとき、確率過程の $\{y_t\}$ は定常状態にあるという。正確に言えば弱定常状態である。多変量確率過程の定常状態は単一変量の拡大で表わされ、平均ベクトルと共分散行列が時刻 t に依存せず、自己共分散行列が２時点間の差 τ にのみ依存することである。

2　仮説により分類 B の取引額の構成比 Y が得られているのに配分ウエイト行列により改めて分類 B の Y を推計する必要があるかという疑問が生ずる。確かに一般的な配分ウエイト行列として $W_g = Y$ とすれば（2-1）の条件を満たしている。分類 B の取引額は X の年ごとの総額を利用すれば、$\hat{Y}^* = YD(l_n' X^*)$ 、として計算することができる。後述するように Y は配分ウエイト行列の特殊な推計方法として説明される。しかしこの推計値は取引額 X^*との対応関係にかかわる情報は利用していない。本章では取引額の構成比の X と Y が対応関係にどのようにかかわっているかを知るための一般的な配分ウエイト行列の構造を推計することが興味の対象である。したがって仮定によって得られた Y のみを配分ウエイトの推計値として利用すると同時に、X と Y を利用した配分ウエイト行列 W も推計値として利用する。W が推計されれば、(1-4) 式より $\hat{Y} = W_g X$ として既存の X から分類 B には存在しなかった $\hat{Y}$ を計算することができる。

3　P が直交行列であることを示す。$i = 2 \cdots m$ に対して、 $j \in \{\xi_1 \cdots \xi_k\}$ が $\omega_{ij} = 0$ となるとする。 P_i から $\{\xi_1 \cdots \xi_k\}$ によって構成される k 個の行を取り除いて P_i^* とし、取り除いた j 行を P_i^{**} とする。

$$P_i^* = (e_{\xi_1}(n) \cdots e_{\xi_k}(n))'$$

と $\{\xi_1 \cdots \xi_k\}$ から構成される P_i^{**} が得られたとする。$P_i^* P_i^{*}{}' = I_k$ 、 $P_i^{**} P_i^{**}{}' = I_{m-k-1}$ 、 $P_i^* P_i^{**}{}' = O$ となるので、$P^* P^*{}' = I$ 、$P^{**} P^{**}{}' = I$ 、$P^* P^{**}{}' = O$ となる。したがって、

$$PP' = \begin{pmatrix} P^* P^*{}' & P^* P^{**}{}' \\ P^{**} P^*{}' & P^{**} P^{**}{}' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} = I$$

となり、P は直交行列となる。

4　分類 A と B の取引額の行列が X^* と Y^* 、その取引額の構成比に対する行列が X^* と Y^* 、年は共通の１から k である。A から B への変換において年次を表わす j に対して前者の取引額である $(x_{1j}^* \cdots x_{nj}^*)$ の合計は配分されて後者の取引額 $(y_{1j}^* \cdots y_{mj}^*)$ のそれぞれ合計と一致しなければならない。しかも、これがすべての年において成り立つわけであるから、取引額の年毎の和は一致し、

$$(x_{\bullet 1}^* \cdots x_{\bullet k}^*) = (y_{\bullet 1}^* \cdots y_{\bullet k}^*)$$

となる。ここで、$\bullet$ は対象とするすべての和を表わしている。$j = 1 \cdots k$ に対して $x_{\bullet j}^* = y_{\bullet j}^*$ となり、$l_n' X^* = l_m' Y^*$ となる。（1-4）式において、U=0 とすれば、$Y = W_g X$ となる。この式に（1-1）式の $X = X^* D(l_m' X^*)^{-1}$ と（1-2）式の $Y = Y^* D(l_n' Y^*)^{-1}$ を代入すれば、

$$D(l_m' X^*)^{-1} \, D(l_n' Y^*) = I_k$$

なので、$Y^* = W_g X^*$ となる。

5　野田［2007］によれば、独立性を仮定した同一配分の方法は以下のようにして推計される。配分ウエイト行列に０の要素が存在しないと仮定すれば、その推計値を（3-12）式となる（p93）。実際には配分ウエイト行列には 0 となる要素が存在するのでその要素に当たる推計値を０とおき、W_2 とする。配分ウエイト行列はウエイト条件を満たすように作りなおし、

$$\hat{W}^p = W_2 D(l_m' W_2)^{-1}$$

として得られる。ここで、$D(x)$ はベクトル x を対角要素とし、残りはすべて０となる行列である。「独立性を仮定した同一配分の方法は … 簡単に i 方式とする」となっているが、本章では p 方式としている。

6　野田［2007］は分類間に独立性を仮定した同一パターンの方法と単純均等配分の方法について、それぞれの推計値で得られた一般的な配分ウエイト行列を初期値とする最大エントロピー法の推計値は一致すると説明している。しかし、その証明については今後の課題として残されたままであった。野田［2010］は取引額表の推計において、任意の正数を要素とするベクトル r と s に

対して、初期値を$V^{(0)}$と$D(r)V^{(0)}D(s)$とした最大エントロピー法による解は一致することを示している。すなわち、最大エントロピー法によれば初期値はrとsに無関係となる。

7　取引額を考慮せずに対応関係の配分構造のみから推計する方法の 1 つに単純均等配分法がある。野田［2007］によれば、単純均等配分法は初期条件付き最大エントロピ法一の特殊解として解釈できる。商品グループ内の対応関係がすべて存在するときには、$W = l_m l_n' / m$となる。一般的な配分ウエイト行列において、商品グループの対応関係に$\omega_{ij} = 0$が存在するときの処理は$a(W)$を利用して対応関係のないところを0に置き換えて調整することである。配分ウエイト行列Wにおいて 0 である要素を 0、そうではない要素を 1 に置き換える関数を$a(W)$とする。

$$W_3 = D(l_m)a(W)/m$$

とおき、ウエイトの条件を満たすように作り直す。単純均等配分の配分ウエイト行列は、

$$\hat{W}^s = W_3 \cdot D(l_m' W_3)^{-1}$$

として得られる。

8　配分ウエイト行列において要素が 0 であるところは対応関係が存在しないことを意味している。$m \times n$行列である擬似的な配分ウエイト行列を求める基礎になっているのが配分額行列である。配分額行列の作成において、行あるいは列のすべての要素が 0 になることが想定される。そのときには得られた行列は有効な$m \times n$行列ではないのでこれを破棄して新たな行列を作成する。すなわち、行の和にm個の 0 でない要素、列の和にn個の 0 でない要素が配置されるまで行列を作成する処理を繰り返す。また、対応関係のタイプ 4b を想定しているので配分ウエイト行列において 0 ではない要素の個数がm+n-1 より大きくなるようにこの処理を繰り返す必要がある。

9　制約条件付き最大エントロピー法の繰り返し計算において、繰り返しの回数の最大値を 500、誤差の程度を 1.0e^{-17}としている。

参考文献

内田陽子・野田容助［2005］「貿易データにおける国際 IO76 部門分類への変換」（猪俣哲史・桑森啓 編『2005 年国際産業連関表の作成と利用』アジア国際産業連関シリーズ No.75 アジア経済研究所）

野田容助［2005］「商品分類の対応関係における配分ウエイトの推計方法」（野田容助・編『東アジア諸国・地域の貿易指数―作成から応用までの基礎的課題―』統計資料シリーズ（SDS）No.88 アジア経済研究所）

―――［2007］「商品分類統一のための配分ウエイト行列の推計と変換」（野田容助・黒子正人・編『貿易関連指数と貿易構造』統計資料シリーズ（SDS）No.91 アジア経済研究所）

―――［2010］「取引額表の推計における RAS 法の特徴」（猪俣哲史・桑森啓 編『2005 年国際産業連関表の作成と利用』アジア国際産業連関シリーズ No.75 アジア経済研究所）

ハーベイ A. C. 著 国友直人・山本拓 訳［1985］『時系列モデル入門』東京大学出版会（Harvey, A. C. [1981] *TIME SERIES MODELS*, Philip Allan Publishers）

山本拓［1989］『経済の時系列分析』現在経済学選書 2 創文社