

## 第8章

## 発展途上国出生力の時系列分析

——台湾地域への応用——

## はじめに

出生力の数量的な決定要因の研究は幅広い範囲で行われている。こうした多くの研究の中で、出生力と出生力に影響を及ぼすさまざまな経済・社会的要因との因果関係の分析のための統計的分析手法のひとつとして知られているのがパス解析である。この方法は出生力と経済・社会的要因の間に仮定される因果関係の循環を連立方程式体系による構造方程式に組み立て、この構造方程式により得られた係数によって因果関係の大きさを検出しようとするものである。<sup>(1)</sup> パス解析では残差に系列相関が生じている場合には、構造方程式の組立に問題が残るため、このようなデータを想定する時、すなわち、出生力の時間による効果を見たいような場合には時系列解析といわれる確率過程を前提にしたモデルによる因果関係の計測が必要になってくる。経済学の分野では、経済変数間相互の因果関係を分析するのに多変量時系列モデルを用いた多くの実証例の報告がある。ここで言う因果関係とは過去の情報から将来を予測する予測誤差にもとづいて定義される「グレンジャーの意味での因果関係」をいい、その検定方法としてはSimsテスト、多変量自己回帰モデル(VARモデル)によるGranger(Granger=Sargent)テスト、VARモデルにもとづく予測誤差分散分解から得られる相対的分散寄与率、相対的分散寄与率

のフーリエ変換である相対パワー寄与率等が広く利用されている。

本稿の目的は、社会・経済的要因が出生力に及ぼす影響をパス解析と多变量時系列解析にそれぞれ応用し、一定方向の影響のみに限らずフィードバックも含めた変数相互間の因果関係の検出方法を中心として、台湾の事例を通して明らかにすることにある。時系列解析の応用としては VAR モデルにもとづく予測相対寄与率を用いて変数相互間の相対依存度を計測する。

台湾地域の出生力は1952年から低下し始め、1964年に全国的な家族計画運動が開始されてからその低下は急激になったが、この出生力低下の背景には経済・社会的な発展が存在していたといわれている。そこで、本稿ではこれらの出生力と経済・社会的要因の因果関係の存在を検討することが重要な問題となる。まず因果関係の検討に先立って出生力として合計特殊出生率、経済・社会的要因として実質GDPの成長率、高等教育を受けた人数の割合、就業者数の割合を設定し、それらの変数についての特徴を示すことから始める。特に、変数によっては指数的に上昇あるいは下降するトレンドを持っているので、その変数の変動要因を原系列に対して対数変換した後の線形トレンドからの乖離として定義する。第2節では、これらの変数を用いて、パス解析を行い、出生率に対する経済・社会要因の因果関係を検討する。通常のパス解析ではトレンドを含む変数に対してモデルを組むので、最初はトレンドを含む原系列を使用する。同じパス解析を今度は原系列からトレンドを取り除いた系列に対して行う。また、VAR モデルにもとづく予測相対寄与率を用いたグレンジャーの意味での因果関係の検討は第3節で行う。

分析にあたっては使用するデータの期間を前期と後期の2つに分け、この期間で因果関係がどのように変化したかを検討し、出生率に対する経済・社会要因の構造変化を明らかにする。また、パス解析による因果関係と予測相対寄与率によるグレンジャーの因果関係では概念が異なるので比較することは難しいと思われるが、それらの結果からお互いの相違を明らかにすることは台湾の出生力の低下を検討する上で興味あるものを提供すると思われる。

## 第1節 台湾の出生力および経済・社会的要因の変数の特徴

台湾の出生力低下と経済・社会的要因の因果関係の存在を検討するにあたって使用する変数を明らかにする。出生力として、1人の女性が15歳から49歳までの出産可能な年齢において、平均何人の子供を生むかを表す指標である合計特殊出生率 (Total Fertility Rates, 以下 TFR と略記する) を採用し、データは *Taiwan Demographic Fact Book, Republic of China* から「Age-Specific Fertility Rates and Total Fertility Rates for Taiwan」に含まれる「TFR」の項目を使用する。<sup>(2)</sup> 経済・社会的要因としては(1)実質GDPの成長率(以下GDPと略記する)、(2)高等教育を受けた人数の割合(HED)、(3)就業率(EMP)の3系列を用いる。HEDは、6歳以上の人⼝に占める高等教育を受けた⼈数の割合である。ここで言う高等教育の範囲は高等学校以上である総合および単科大学、専門学校を指す。出生力の理論モデルは第3章に説明があるので省略するが、この3系列の選択に対しては、第2節で説明する「パス解析」および第4節の「VARモデル」において入力データとなる長期時系列データが存在するものの中からいろいろと試みた結果、モデルに適し同時に解釈のし易いものを最終的に説明変数とした。<sup>(3)</sup>

4変数の各系列とも得られたデータは1952年から90年までの年データであり、サンプル数は39である。第1図には4系列がプロットされており、また、4系列の平均増加率は第1表に示されている。TFRは平均増加率にして約-4%でほぼ直線的に下降するトレンドを持ち、その周りで中期的および短期的に変動する系列である。HEDは逆に平均増加率約9%で指数的に上昇するトレンドを持つ系列であり、しかも、この変動幅は年を経るに従って大きくなっている。第4節で述べるVARモデルは1次と2次のモーメントが時間に依存しないという弱定常状態の変数を入力データとして使用するので、使用的データが非定常状態の場合には変換して定常状態の系列を作ら

第1表 台湾の出生率および経済・社会要因の平均増加率

変名	TFR	GDP	HED	EMP
平均成長率 (t値)	-0.0402 (-42.548)	0.0853 <sup>(注2)</sup> ●	0.0595 (49.938)	0.0007 (7.001)

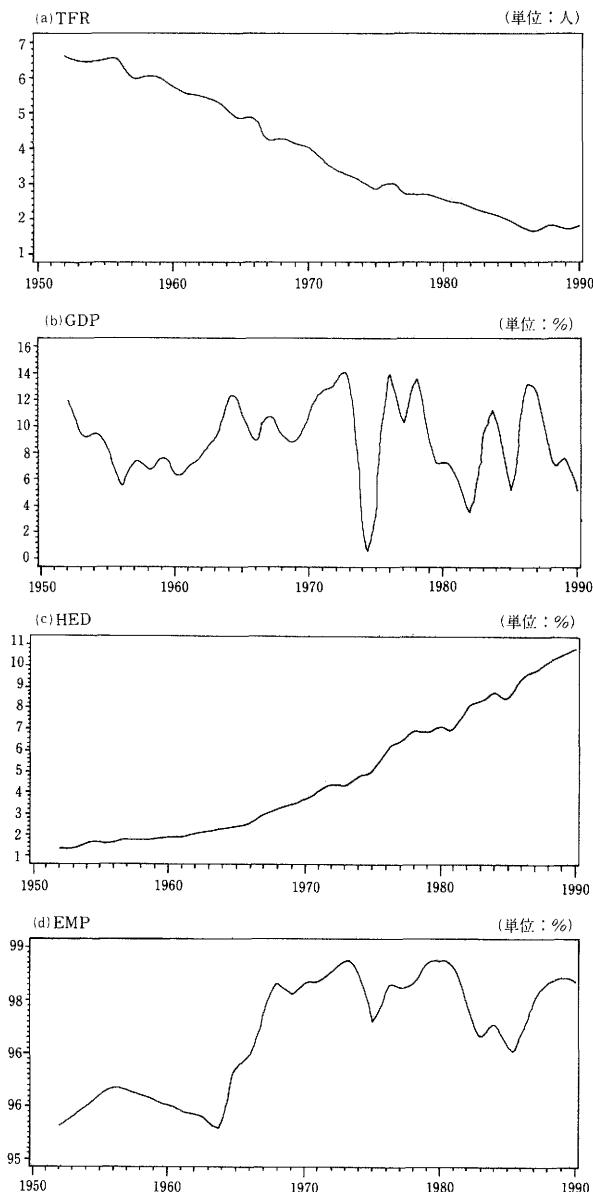
(注) 1) 平均成長率は、 $y_t = y_0(1+r)^t$  とトレンドを仮定したときの  $r$  で定義する。推計値で式を対数変換した式に対して OLS により得た値であり、 $\log(1+r)=r$  の近似値を用いている値はすべて 1 % で有意である。2) GDPについて成長率のデータなので単純平均を用いている。

(出所) 合計特殊出生率 (TFR) は、*Taiwan Demographic Fact Book, Republic of China*, 実質 GDP, 高等教育を受けた人数の割合 (HED), 就業率 (EMP) は、*Taiwan Statacal Data Book, 1991*をもとに著者作成。

なければならない。多くの場合、年をサンプル点とした経済時系列を定常状態にするには、原系列から長期変動である強いトレンドを取り除き、中期および短期の変動要因のみを持ち同時に変動幅を時間に依存しないような系列に変換する必要がある。トレンドを取り除くとはいっても、そのトレンドを推計する確立された最適な方法は必ずしも存在せず、しかも、変動要因を原系列からトレンドを取り除いた系列で定義した場合、トレンドの推計の方法により違った変動要因ができるので解釈をするさいに注意が必要である。

TFRは直線的に下降するトレンド、HEDは指数的に上昇するトレンドを持っているので、それぞれの変動要因を原系列および対数変換した後の系列のトレンドからの乖離として定義する。トレンドの除去については、階差による方法と1次の線形トレンドからの乖離による方法という2つの方法がよく用いられる。階差による方法では短期の変動を強調し、線形トレンドからの乖離による方法は長期の変動を強調する傾向にある。結果は省略するが、台湾の4系列の場合には前者の階差によるトレンド除去は VAR(p) の次数  $p$  が高次になり、サンプルサイズに対して大きくなりすぎるのでモデルが不安定になる。それに対して、後者の線形トレンドからの乖離では次数  $p$  が低次でモデル化できるためモデルは階差に比べて相対的に安定になり、しかも、後者の方が解釈しやすい。そこで、トレンド除去の方法としては線形トレ

第1図 台湾の出生率および経済・社会要因の原系列のプロット



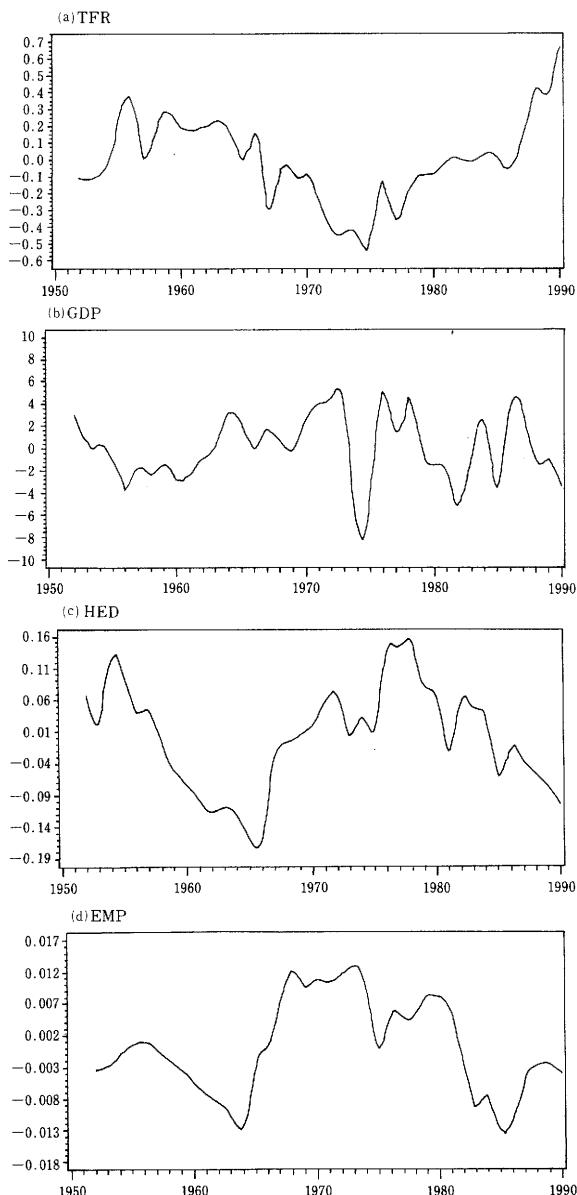
ドからの乖離を採用する。また、経験的に変動幅は対数変換によってほぼ一定の幅に抑えることができる。結果として、本稿では非定常状態の系列の変動要因を原系列あるいはその対数変換した系列の線形トレンドからの乖離として定義することにする。以下この方法により得られた4系列に対してその特徴を明らかにする。また、これらの系列を用いてパス解析およびVARモデルにもとづく相互依存関係の分析を試みることにする。<sup>(4)</sup>

第2図には原系列あるいはその対数変換した系列から線形トレンドを取り除いた系列がそれぞれ示されている。この図の(a)から、特に、出生率の変動については1975年を境として減少傾向にあったのが増加傾向に変わっていることに注意すべきである。このことは、それまでは加速度的に減少傾向にあったのがその減少に陰りが現れてきたと見てよいであろう。

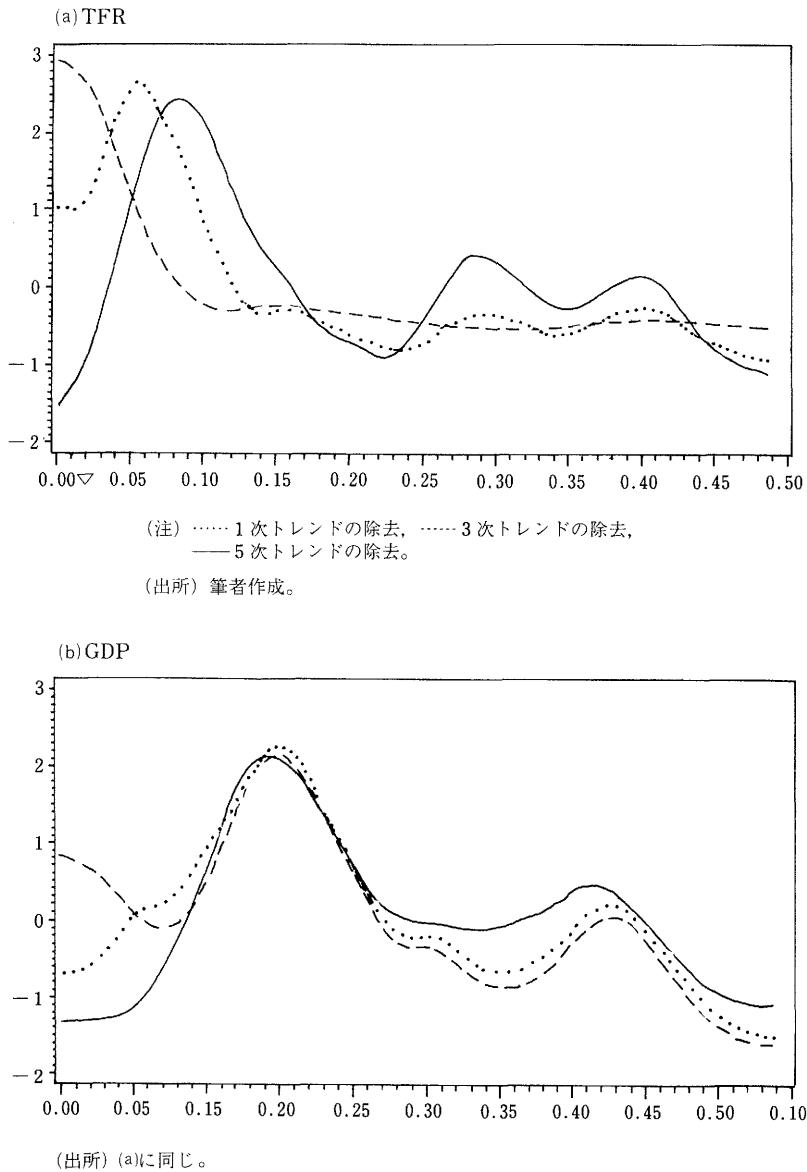
出生率の因果関係の構造的な違いを見るために、以下の分析においてデータを前期と後期に分ける必要があるが、出生率の低下の加速度が鈍る1975年をその境とする。ただし、前期は台湾経済に大きなショックを与えた第1次オイルショックの時期をふくむので、この部分を取り除いて1952-72年を前期、1975-90年を後期とする。<sup>(5)</sup>

変動要因の循環を見るためのパワースペクトラムは第3図に示されている。線形トレンドの除去だけではまだ長期の循環が残っているので、さらに、3次と5次のトレンド除去をした各系列のパワースペクトラムも同図に同時に示されている。なお、ここでは、同一の図の中に3本のパワースペクトラムを表示できるようにパワースペクトラムの標準化したものを図示している。台湾の経済成長循環の周期として6年の中期循環と3年の短期循環があることが知られているが、第3図の(b)より実質GDPについては周波数が0.18と0.42の近くでピークを見ることができ、これを期間に直すと周波数の逆数である約6年と3年にはほぼ対応することを確認できる。同じように高等教育を受けた人数の割合は約8年前後の周期、就業者数の割合と合計特殊出生率には約10年前後の投資循環に近い周期があることがわかる。トレンドの次数にかかわらずほぼ同一のピークを示すGDPのパワースペクトラムに対して、

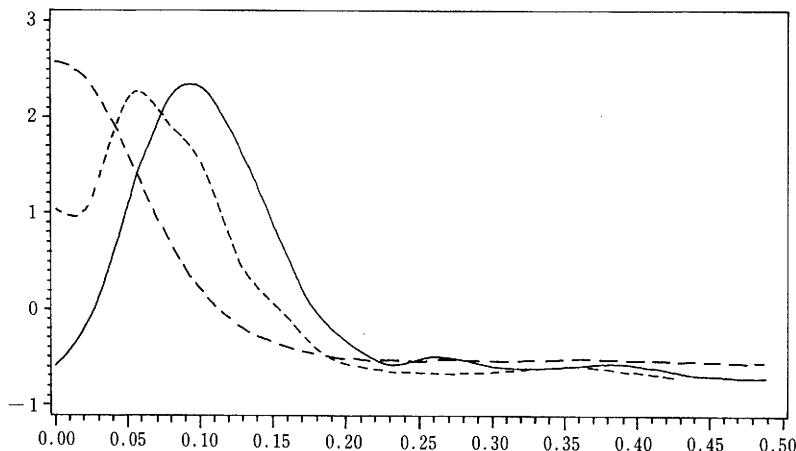
**第2図** 台湾の出生率および経済・社会要因のトレンドを除去した系列(残差)のプロット



第3図 台湾の出生率および経済社会要因  
のパワースペクトラム

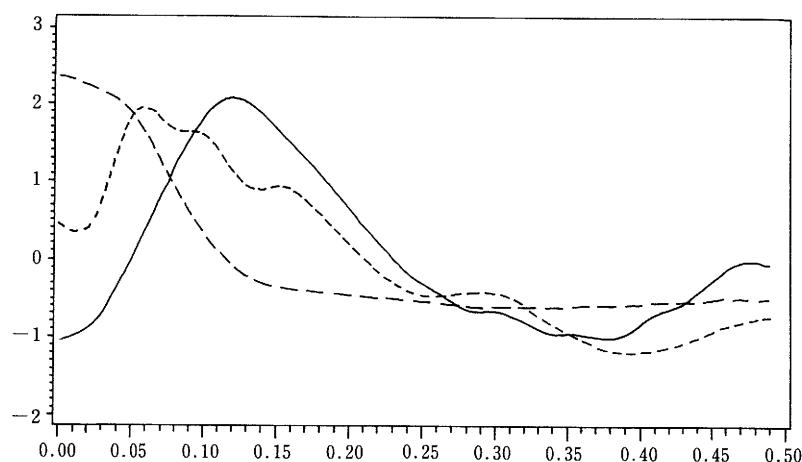


(c) HED



(出所) (a)に同じ。

(d) EMP



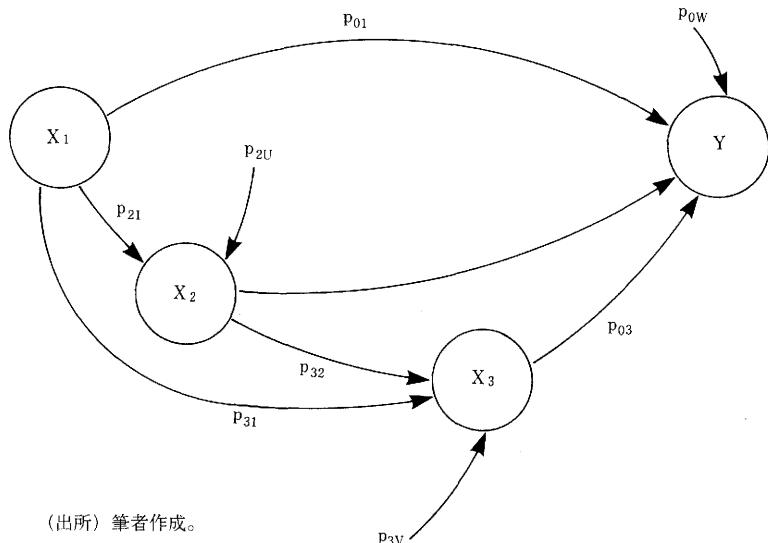
(出所) (a)に同じ。

TFR, HED, EMPには中期変動にいろいろな周期が含まれており、これらが複雑な変動をしていることの表れと思われる。

## 第2節 パス解析

ある特定の因果関係が仮定されたいくつかの変数を構造方程式にモデル化し、相関関係をもとに各変数間の影響を定量的に推論してこの因果関係を解釈しようとするのがパス解析である。このモデルは一般に階層的な連立方程式の体系で表される構造方程式であり、それの方程式は単なる経験的な関係よりもむしろ因果関係を表すようにモデル化される。パス解析のためのモデルとしてはいくつかの変数を経由しながら一定方向の因果関係を表す帰納的なモデルであることが多い。本稿でもこのモデルをパス解析に使用する。

第4図 因果関係を示すパスダイアグラム



(出所) 筆者作成。

しかし逆方向の因果関係をも考慮したフィードバックを含むパス解析の応用がないわけではない。

第4図に示されたような循環図をパスダイアグラム(path diagram)という。本稿で採用する一定方向の帰納的な循環が存在する時、独立変数  $x_i$  に対して、従属変数を  $x_2, x_3, y$  とすれば、各変数間の因果関係を表す構造方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} y &= p_{01}x_1 + p_{02}x_2 + p_{03}x_3 + p_{0w}x_w \\ x_3 &= p_{31}x_1 + p_{32}x_2 \quad + p_{3v}x_v \quad \dots\dots\dots \quad (1) \\ x_2 &= p_{21}x_1 \quad + p_{2u}x_u \end{aligned}$$

ここで、 $x_w, x_v$  および  $x_u$  は説明変数では表しきれない攪乱項を表し、攪乱項も含めてすべての変数は標準化されているものとする。この構造方程式の係数をパス係数という。すべての変数は標準化されているので、 $x_i$  と  $x_j$  を乗じて平均をとれば相関係数が計算される。すなわち、 $E\{x_i x_j\} = r_{ij}$  となる関係を利用すれば、以下に述べるパス解析の直接効果と間接効果を求めることができる。構造方程式(1)の第1番目の式にある  $x_1$  の係数  $p_{01}$  は第4図のパスダイアグラムに示されているように変数  $x_1$  から直接的に変数  $y$  へと向かう効果であり、直接効果という。パス係数  $p_{ij}$  はパスダイアグラムを参照すればわかるよう起点  $j$  から終点  $i$  へと向かう較果を示す。 $p_{02}$  は  $x_2$  から  $y$  への直接効果、 $p_{03}$  は  $x_3$  から  $y$  への直接効果を表す。

(1)式の  $y$  を  $x_1$  と  $x_2$  のみの変数で表せば、

$$\begin{aligned} y &= (p_{01} + p_{03}p_{31})x_1 + (p_{02} + p_{03}p_{32})x_2 \\ &\quad + (p_{03}p_{3v}x_v + p_{0w}x_w) \quad \dots\dots\dots \quad (2) \end{aligned}$$

となる。(2)式の  $x_1$  の係数は変数  $x_1$  から  $y$  への直接効果と次に説明する間接効果の和の効果を表す。この効果の中でパス係数の  $p_{01}$  は  $x_1$  から  $y$  への直接効果である。 $p_{03}p_{31}$  は  $x_2$  から  $x_3$  を経由して  $y$  へと向かう間接効果である。第2項の  $x_2$  の係数は変数  $x_2$  から  $y$  への効果を表わし、 $p_{02}$  は  $x_2$  から直接  $y$  への直接効果、 $p_{03}p_{32}$  は  $x_2$  から  $x_3$  を経由して  $y$  へと向かう間接効果である。さらに(1)式の  $y$  を  $x_1$  のみの変数で表せば、

$$y = (p_{01} + p_{02}p_{21} + p_{03}p_{31} + p_{03}p_{32}p_{21})x_1 \\ + \{(p_{02} + p_{03}p_{32}) p_{2u}x_u + p_{03}p_{3v}x_v + p_{0w}x_w\} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

となる。変数  $x_1$  の係数の各項は  $x_1$  からいろいろな経路を経て  $y$  へと向かう一定方向の影響の和の効果を表す。 $p_{01}$  は  $x_1$  から直接  $y$  へと向かう直接効果である。 $p_{02}p_{21}$  は  $x_1$  から  $x_2$  を経由して  $y$  へと向かう間接効果であり、 $p_{03}p_{31}$  も  $x_3$  を経由して  $y$  へと向かう効果である。 $p_{03}p_{32}p_{21}$  は  $x_1$  から  $x_2$  を経由し、さらに  $x_3$  を経由して  $y$  へと向かう間接効果である。(3)式の両辺に  $x_1$  を乗じて平均をとると、

$$r_{01} = p_{01} + p_{02}p_{21} + p_{03}p_{31} + p_{03}p_{32}p_{21}$$

となる。この場合は  $x_1$  から  $y$  へと向かう直接効果と間接効果のすべての効果を加えると相関係数  $r_{01}$  に等しくなる。

前述したように変数はすべて標準化されているので、(1)式で表されるような構造方程式の攪乱項  $p_{0w}x_w$ ,  $p_{3v}x_v$ ,  $p_{2u}x_u$  をそれぞれ  $u_y$ ,  $u_3$ ,  $u_2$  と置き換えて回帰分析をおこなうと、 $\beta$  係数として知られている標準偏回帰係数がパス係数の値と一致する。パス係数  $p_{0w}$ ,  $p_{3v}$ ,  $p_{2u}$  はそれぞれの回帰方程式の残差分散の平方根として得られる。したがって、本稿でも  $\beta$  係数の推計値をパス係数とする。しかし一般的にはパス係数と  $\beta$  係数とは必ずしも一致するとは限らない。これらの関係をまとめたのが第2表に示された変数  $y$  に対する  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  の総合効果の分解である。

台湾の出生力と経済・社会要因を表す4系列を用いてパス解析を行う。(1)式において、 $y$  を TFR,  $x_1$  から  $x_3$  を GDP, HED, EMP とする。(1)式は階層的なモデルであるため、 $x_1$  から  $x_3$  までをどの変数を対応させるかが重要な問題である。しかし、フィードバックの関係を調べるさいに、 $x_1$  から  $x_3$  に対応させるすべての組み合わせである6通りを計算するので、今のところ  $x_{ij}=1 \cdots 3$  には何が対応してもかまわない。回帰式による構造方程式の推計結果を示す前に(1)式の第1番目の方程式である出生率のみにかかるパス係数を全期間、前期および後期に分けそれについて示す。サンプルサイズが小さくパス係数の推定値が不安定になることが想定されるため、期間を細かく区分

した結果からその整合性を見るにすることにする。まず、原系列を直接パス解析に応用した結果から説明する。第3表の相関マトリクスからわかるようにTFRとHEDの相関係数のみ極端に高く、全期間では-0.9419であり、前期は-0.9581、後期は-0.9545となり線形の関係が強い。したがって第4表(a)の、全期間を通してみたパス係数からTFRを説明するのにHEDが主たる説明要因となり、TFRとの相関が-0.8043であるEMPも同じく説明要因になる。す

第2表 変数yに対する $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ の総合効果

変 数	効果のタイプ	効果の量
$x_1$	直接効果	$p_{01}$
	$x_3$ を考慮した間接効果	$p_{03} p_{31}$
	$x_2$ と $x_3$ を同時に考慮した間接効果	$p_{03} p_{32} p_{21}$
	$x_2$ を考慮した間接効果	$p_{02} p_{21}$
$x_2$	直接効果	$p_{02}$
	$x_3$ を考慮した間接効果	$p_{03} p_{32}$
$x_3$	直接効果	$p_{03}$

(出所) M. G. Kendall ; C. A. O' Muircheartaigh, "Path Analysis and Model Building" *World Fertility Survey Technical Bulletins*, International Statistical Institute, 1977年3月, をもとに筆者作成。

第3表 原系列の相関マトリクス

(a) 全期間 (1952-90年)

	TFR	GDP	HED	EMP
TFR	1.0000			
GDP	0.0145	1.0000		
HED	-0.9419	-0.0765	1.0000	
EMP	-0.8043	0.0731	0.6681	1.0000

(b) 前期 (1952-69年)

	TFR	GDP	HED	EMP
TFR	1.0000			
GDP	-0.3211	1.0000		
HED	-0.9581	0.2331	1.0000	
EMP	-0.7620	0.0746	0.8731	1.0000

## (c) 後期(1970—90年)

TFR	1.0000				
GDP	0.3193	1.0000			
HED	-0.9545	0.2331	1.0000		
EMP	0.4289	0.0746	0.8731	1.0000	

(出所) 筆者作成。

なわち、TFRの直線的な下降傾向のトレンドを指指数的な上昇トレンドを持つHEDとEMPで説明してしまい、TFRの中期や短期の変動はほとんど無視され、しかも、TFRの固有変動のパス係数  $p_{0w}$  も小さい値しか持たない。結果を示していないが、ダービン=ワトソンの統計量によれば全期間と前期のデータを用いた時のモデルの残差には高い1次の自己相関の検出が確かめられる。第4表(b)から、前期についての主たる説明要因はHEDであり、そのパス係数はほとんど-1に近い。後者についてはHEDが主たる説明要因であることには変わりはないが、前期に比べHEDの影響が減少した分をEMPが

第4表 原系列をパス解析に応用した時の出生率に係わる式のみのパス係数

## (a) 全期間(1952—90年)

期間	サンプル サイズ	GDP	HED	EMP	$p_{0w}$
1952—90	39	-0.0198	-0.7398**	-0.3046**	0.2544

## (b) 前期

期間	サンプル サイズ	GDP	HED	EMP	$p_{0w}$
1952—67	16	-0.0596	-1.0418*	0.1238	0.2300
1952—68	17	-0.0562	-1.1591*	0.2601*	0.2489
1952—69	18	-0.0655	-1.1852*	0.2777*	0.2586
1952—70	19	-0.0390	-1.2089*	0.2950*	0.2814
1952—71	20	-0.0116	-1.1621*	0.2298	0.2965
1952—72	21	-0.0018	-1.1250*	0.1765	0.2845
1952—73	22	-0.0005	-1.1316*	0.1740	0.2598
1952—74	23	-0.0602	-1.0602*	0.1067	0.2429
1952—75	24	-0.0670	-1.0110*	0.0429	0.2271

## (c) 後期

期間	サンプル サイズ	GDP	HED	EMP	$P_{0w}$
1960-90	23	0.0579	-0.9184**	0.0759	0.3047
1969-90	22	0.0736	-0.9108**	0.0963	0.2960
1970-90	21	0.0949	-0.8914**	0.1237*	0.2783
1971-90	20	0.0927	-0.8909**	0.1561*	0.2501
1972-90	19	0.0707	-0.8943**	0.1777**	0.2349
1973-90	18	0.0603	-0.9012**	0.1894**	0.2545
1974-90	17	0.0736	-0.9185**	0.2088**	0.2761
1975-90	16	0.0734	-0.9038**	0.2232**	0.3027
1976-90	15	0.0587	-0.8657**	0.2185**	0.3209

(注) \*\* 5% の有意水準, \* 10% の有意水準を表わす。

(出所) 筆者作成。

第5表 トレンドを除去した系列の相関マトリクス

## (a) 全期間 (1952-90年)

	TFR	GDP	HED	EMP
TFR	1.0000			
GDP	-0.2767	1.0000		
HED	-0.5012	0.2051	1.0000	
EMP	-0.5486	0.1771	0.4693	1.0000

## (b) 前期 (1952-72年)

TFR	1.0000			
GDP	-0.6151	1.0000		
HED	-0.2287	-0.1417	1.0000	
EMP	-0.5130	-0.0160	0.3941	1.0000

## (c) 後期 (1975-90年)

TFR	1.0000			
GDP	-0.1757	1.0000		
HED	-0.6239	0.3919	1.0000	
EMP	-0.5287	0.2327	0.4594	1.0000

(出所) 筆者作成。

説明している。

次に原系列から直線のトレンドを取り除いた系列の場合を考える。第5表の相関マトリクスから極端な線形関係を持つ系列は存在しない。第6表から、前期ではTFRを説明する要因としてGDPとEMPが有意に表れ、HEDは有意でてこない。ところが、後期になるとまったく逆の現象が見られ、HEDのみが有意になる。前期と後期の関係が逆の関係になっているので、その間の期間としてさらに中期を考えてみる。この期間はGDPの影響がなくなり、HEDとEMPの影響がでてくる。このことは、TFRへの因果関係は前期ではGDPとEMPの影響が強く働いていたのに、中期に入るとGDPの影響が減りはじめ、後期になるとEMPの影響も減少して逆にHEDのみの影響が強まってくるという構造変化を表すものと解釈される。残差の自己相関は

第6表 トレンドを除去した系列にパス解析を応用した時の出生率にかかる式のみのパス係数

(a) 全期間（1952—90年）

期間	サンプル サイズ	GDP	HED	EMP	$p_{ow}$
1952-90	39	-0.1418	-0.2919**	-0.3878**	0.8071

(b) 前期

期間	サンプル サイズ	GDP	HED	EMP	$p_{ow}$
1952-67	16	-0.6931**	-0.1051	-0.4539**	0.6634
1952-68	17	-0.6644**	-0.1413	-0.4274**	0.6646
1952-69	18	-0.6416**	-0.1342	-0.4704**	0.6362
1952-70	19	-0.5994**	-0.1333	-0.4176**	0.6547
1952-71	20	-0.5916**	-0.1184	-0.4000**	0.6092
1952-72	21	-0.6018**	-0.1190	-0.3883**	0.5354
1952-73	22	-0.5962**	-0.0928	-0.4091**	0.4919
1952-74	23	-0.2089	-0.0479	-0.6622**	0.7038
1952-75	24	-0.0658	-0.0799	-0.6000**	0.8072
1952-76	25	-0.0545	-0.0668	-0.6095	0.8036

## (c) 中期

期間	サンプル サイズ	GDP	HED	EMP	$p_{\text{sw}}$
1961-76	16	0.2384	-0.4068	-0.4590*	0.6859
1960-77	18	0.1871	-0.4249*	-0.4773**	0.6614
1960-76	16	0.1918	-0.3672	-0.5052*	0.6842
1960-78	19	0.2121	-0.4128*	-0.5084**	0.6611
1962-78	17	0.2942	-0.4580*	-0.4283*	0.6847
1963-78	16	0.2864	-0.4111	-0.3729	0.7725
1962-78	17	0.3339	-0.4671*	-0.3683	0.8684
1961-78	18	0.2598	-0.4430*	-0.4724**	0.6635
1965-78	14	0.4211	-0.5260	-0.1497	0.8870

## (d) 後期

期間	サンプル サイズ	GDP	HED	EMP	$p_{\text{sw}}$
1968-90	23	0.1018	-0.5347**	-0.3141	0.7831
1969-90	22	0.1007	-0.5206**	-0.3203	0.7844
1970-90	21	0.1008	-0.5193**	-0.3136	0.7881
1971-90	20	0.0919	-0.5072**	-0.3186	0.7902
1972-90	19	0.0958	-0.5134**	-0.3027	0.8003
1973-90	18	0.1468	-0.5560**	-0.2379	0.8206
1974-90	17	0.3939*	-0.8828**	0.0975	0.7359
1975-90	16	0.2280	-0.9220**	0.1769	0.7484
1976-90	15	0.0358	-0.9714**	0.2094	0.5939
1978-90	14	-0.0160	-0.9311**	0.1852	0.5925

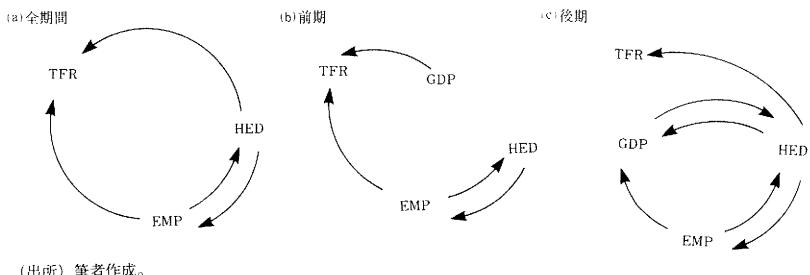
(注) 第4表に同じ。

(出所) 筆者作成。

ダービン=ワトソンの統計量によれば原系列のそれに比べて小さくなっています。前期と後期は有意には表れないが、全期間については依然として有意に検出される。パス係数は各期間とも比較的安定した値を保っている。

原系列と原系列からトレンドを取り除いた系列のそれぞれを検討した結果、トレンドの変動に影響にされない後者の方が分析のためのデータとしては最適と思われる。また、フィードバックの関係も含めた因果関係を明らか

第5図 台湾のパスダイアグラム



(出所) 筆者作成。

にするため、(1)式において、 $y$ をTFRに固定し、 $x_1$ から $x_3$ に説明変数を6通りの方法で入れ換えて計算する。この方法により得られた有意な係数のみをぬきだし、因果関係をまとめた。このパス解析のパスダイアグラムは第5図に示される。

### 第3節 VARモデルにもとづく予測相対寄与率

平均0を持つm次元弱定常状態の時系列を $y_t = [y_1(t) \cdots y_m(t)]'$ 、同じくm次元ホワイトノイズの系列を $u_t = [u_1(t) \cdots u_m(t)]'$ とする時、次数pの多変量自己回帰モデル（ベクトル値自己回帰モデルともいい、vector autoregressive model: VAR(p)と略記する）は次のように表すことができる。

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + u_t \quad \dots \quad (5)$$

ここで、 $\Phi_i$ ,  $i=1 \cdots p$ は $m \times m$ の係数マトリクスを表し、観測値の数はnとする。適当な条件のもとでこの次元pのARプロセスは無限次元のMAプロセスへ変換することができる。<sup>(8)</sup>  $B$ をバックワードシフトオペレータ、 $By_t = y_{t-1}$ とすると、(5)式は

$$\begin{aligned} y_t &= (I - \Phi_1 B - \cdots - \Phi_p B_p)^{-1} u_t \\ &= \Psi_0 u_t + \Psi_1 u_{t-1} + \cdots \end{aligned} \quad \dots \quad (6)$$

となる。 $\Psi_k$ は $m \times m$ の係数マトリクスであり、 $u_t$ が $y_t$ へ与える影響の程度を示す。 $\Psi_k$ はインパルス応答関数といわれる。 $\Psi_0 = I_m$ である。この $\Psi_i$ は次のように逐次解によって $\Phi_i, i=1 \dots p$ の解として表すことができる。

$$\Psi_1 = \Phi_1$$

$$\Psi_2 = \Phi_1 \Psi_1 + \Phi_2$$

⋮

$$\Psi_p = \Phi_1 \Psi_{p-1} + \dots + \Phi_{p-1} \Psi_1 + \Phi_p$$

$$\Psi_j = \Phi_1 \Psi_{j-1} + \dots + \Phi_{p-1} \Psi_{j-p+1} + \Phi_p \Psi_{j-p} \quad (j > p)$$

係数マトリクス $\Phi_i, i=1 \dots p$ の値は Yule-Walker 方程式によって計算することができる。<sup>(9)</sup> VAR (p) モデルの残差に相当する $u_t$ の共分散行列 G が対角行列と仮定する。<sup>(10)</sup> その時、 $u_t$ の要素は互いに独立なので $y_t$ の i 番目の要素である $y_i(t)$ の分散は次のように m 個の変動に分解することができる。

$$E\{y_i(t)^2\} = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k,ij}^2 \right) \sigma_j^2$$

この式の両辺を  $E\{y_i(t)^2\}$  で割ると、

$$1 = \sum_{j=1}^m \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k,ij}^2 \right) \sigma_j^2 / E\{y_i(t)^2\} \right] \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

と表される。ここで(7)式の [ ] の中を  $RVC_{j \rightarrow i}$  と置くと  $RVC_{j \rightarrow i} \geq 0$  であり、(7)式は、

$$\sum_{j=1}^m RVC_{j \rightarrow i} = 1$$

となる。この  $RVC_{j \rightarrow i}$  を相対予測分散寄与率 (Relative prediction Variance Contribution, 以下 RVC と略記する) と呼ぶ。RVC は変数  $y_j(t)$  が変数  $y_i(t)$  に Granger の意味の因果関係として影響することを意味しており、その量は影響の程度を表す。 $RVC_{j \rightarrow i}$  は 0 と 1 の間の値を取り、1 に近ければ  $y_j(t)$  から  $y_i(t)$  への影響の貢献度は高くなり、逆に  $RVC_{j \rightarrow i}$  が 0 に近ければ  $y_j(t)$  は  $y_i(t)$  に影響を与えないことになる。

前述したように、RVC を計算するには VAR (p) から得られた残差の分散

共分散行列  $G$  が対角行列であることが必要である。モデルの残差がお互いに無相関であるという仮説、すなわち、 $u_t$  の共分散行列  $G$  が対角であることを検定するために次の帰無仮説を考える。

$$H_0 : G = \text{Diag} (g_{11} \cdots g_{mm}) \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

$\text{Diag} (g_{11} \cdots g_{mm})$  は  $g_{11} \cdots g_{mm}$  を対角要素とする対角行列を表す。尤度比検定によれば、下記に示す統計量  $L$  は帰無仮説が正しければ自由度  $m(m+1)/2$  を持つ  $\chi^2$  分布に従って分布することが知られている。

$$L = (n-1) \{ \log [ | \text{Diag} (g_{11} \cdots g_{mm}) | ] - \log ( | G | ) \} \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

ここで、 $m$  は変数の数、 $n$  はサンプルサイズである。

VAR モデルを台湾の出生力の因果関係に適用するにあたって  $y_1(t)$  を TFR,  $y_2(t)$  を GDP,  $y_3(t)$  を HED,  $y_4(t)$  を EMP に対応させ、4 次元の時系列  $y_t$  を構成する。モデル化にあたり、まず最初は VAR モデルの次数  $p$  を決めることがあるが、この決定には AIC (赤池情報量規準) の最小値を持つモデルが最適であるというモデル選択の方法を用いる。VAR ( $p$ ) モデルが(5)式とすれば AIC は次のように与えられる。

$$\text{AIC} = n \log 2\pi + n \log |G| + nm + 2pm^2 + m(m+1)$$

第 8 表にはデータを期間ごとに区切って使用し、サンプルサイズが小さいので次数を 3 以下に抑えた場合の VAR モデルの最適な次数が示されている。この表には VAR モデルから得られた残差の相関行列が対角行列かどうかを検定する統計量  $\chi^2(G)$  が示されている。この仮説は残差の分散共分散行列  $G$  の非対角要素が 0 であることなので、帰無仮説は(8)式のとおりであり、このときの検定統計量は(9)式に示されている。残差が互いに相関しあっている場合には瞬間的因果関係があるという。自由度 6 を持つ  $\chi^2$  分布の 5 % 有意水準は 12.59 なので、この表からわかるように帰無仮説はすべて棄却される。したがって、VAR モデルによる残差は互いに無相関ではなく瞬時的な因果関係の存在が確かめられるため、予測相対寄与率 RVC を用いる理論的な根拠を失う。そのため、この残差を無相関にすることがこのモデルを用いる上で重要なポイントになる。

残差を無相関に直す方法としては、Schmidtの直交化がよく用いられる。この方法はCholesky分解により解析的に直交化するわけであるが、直交化された新たな残差ベクトルは元の残差ベクトルの要素の順序によって解が異なるので解釈が難しい。<sup>(12)</sup> そこで、本稿では残差の分散共分散行列Gを直交化するため、残差の系列に対して1因子モデルによる分散共分散行列の直交化<sup>(13)</sup>を行う。

$$u_t = af_t + e_t \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

ここで $f_t$ は  $E\{f_t\} = 0$ ,  $E\{f_t f_t'\} = 1$ となる共通因子 (common factor) であり、 $a' = (a_1 \cdots a_m)$ は共通因子の因子負荷量 (factor loading),  $e_t' = (e_1(t) \cdots e_m(t))$ は独自因子 (unique factor) である。因子モデルの構造から $e_t$ の分散共分

第7表 VARモデルの次数と残差の検定統計量

## (a) 前期

期間	サンプルサイズ	p	$\chi^2(G)$	$\chi^2(D)$
1952-67	16	1	59,6457*	0.0926 <sup>2)</sup>
1952-68	17	1	56,2832*	0.2403
1952-69	18	1	62,2422*	0.6608
1952-70	19	1	65,7686*	1.3938
1952-71	20	1	26,1691*	1.6029
1952-72	21	2	39,9771*	1.2642

## (b) 後期

1971-90	20	3	55.9138*	1.2294
1972-90	19	3	60.5884*	1.3090
1973-90	18	1	35.8697*	7.4861 <sup>3)</sup>
1974-90	17	1	17.8220*	7.1195 <sup>3)</sup>
1975-90	16	1	29.4132*	11.9687
1976-90	15	3	81.0522*	14.9944*

(注) 1) \* 10%の有意水準を表す。

2) 最小AICを持つモデルの次数は3であるが、 $\chi^2(D)$ が有意なので、次にAICの小さなモデルの次数を選択した。

3) 最小AICを持つモデルの次数は3であるが、 $\chi^2(D)$ が大きいので、次のモデルを選択した。

(出所) 筆者作成。

散行列Dは対角行列となる。これらの関係は次のようになる。

$$G = aa' + D$$

この因子分析によって  $a$ ,  $f_i$  および  $e_t$  を同時に決めることができる。その時、(10)式を(6)式に代入すれば変換されたMAプロセスは、

$$\begin{aligned} y_t &= \Psi_0 (af_t + e_t) + \Psi_1 (af_{t-1} + e_{t-1}) + \dots \\ &= (\Psi_0 e_t + \Psi_1 e_{t-1} + \dots) + (\Psi_0 a f_t + \Psi_1 a f_{t-1} + \dots) \end{aligned}$$

と表される。独自因子の系列  $e_t$  は要素どうし互いに独立であり、さらに、 $f_i$  と  $e_t$  もまた互いに独立にであることから、 $y_t(t)$  の分散は  $m$  個の独自因子に係わる変動と 1 個の共通因子に係わる変動の和で表すことができる。

$$E\{y_t(t)^2\} = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k,ij}^2 \right) v_j^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^m \psi_{k,ij} a_j \right)^2$$

ここで  $v_j^2$  は  $e_t$  の  $j$  番目の要素の分散である。RVC<sub>j→i</sub> を導きだしたようにこの両辺を  $E\{y_t(t)^2\}$  で割ると、

$$1 = \sum_{j=1}^m \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k,ij}^2 \right) v_j / E\{y_t(t)^2\} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^m \psi_{k,ij} a_j \right)^2 / E\{y_t(t)^2\}$$

となる。この式の右辺にある [ ] の中を RVC<sub>j→i</sub>\* と置き、2 項目を  $\mu_j$  と置くとき、この式は、

$$\sum_{j=1}^m RVC_{j \rightarrow i}^* + \mu_i = 1$$

となる。

台湾の例に戻ると、第 7 表の右側には 1 因子モデルを使用したモデルの残差の相関行列 D が対角行列かどうかを検定する統計量  $\chi^2(D)$  が示されている。この  $\chi^2(D)$  が有意でない場合には 1 因子モデルによる予測相対寄与率 RVC\* を用いる理論的な根拠を与える。時系列データとしてはサンプルサイズが小さいので、第 7 表の(a)のように前期を 1952 年から 67 年、…、52 年から 72 年までの 6 つの場合に分け、その結果の安定性を確かめる。この表から前期はすべて D が対角行列であるという帰無仮説は棄却できない。第 7 表の(b)のように後期は 1971 年から 90 年、…、76 年から 90 年と 6 つの場合に分け、そ

それについて仮説検定を行う。1976—90年は棄却されるが、それ以外の期間では棄却されない。したがって、前期と後期ともに $\chi^2(D)$ が有意でないと判断してもかまわない。パス解析のときと同じく前期を1952年から72年、後期を1975年から90年と定め、この期間を1因子モデルを用いた予測相対寄与率RVC\*によって検討する。

RVC\*の結果はRVCとともに第8表に示されている。前期のRVC\*を表す第8表の(2)をもとにRVC\*の見方を説明する。この表によれば、TFRに対する貢献度の割合は最初の行に示される。TFRとTFRの交点にある10.6782%はTFRに対するTFRからの貢献度の割合を表し、20.9165%はGDP, 9.9785

第8表 RVCおよびRVC\*

(1) 前期のRVCおよび残差の相関行列G(下の表)(1952—72年)

	TFR	GDP	HED	EMP	共通変動	total
TFR	36.3992	28.4400	18.9370	16.2238	●	100.000
GDP	4.6713	70.5990	20.3302	4.3995	●	100.000
HED	1.5555	5.9133	61.4127	31.1185	●	100.000
ENP	4.6165	22.1527	15.6903	57.5406	●	100.000
TFR	1.0000	-0.6257	-0.6906	-0.3538		
GDP	-0.6258	1.0000	0.5593	0.0685		
HED	-0.6906	0.5593	1.0000	0.3707		
ENP	-0.3538	0.0685	0.3707	1.0000		

(2) 前期のRVC\*および残差の相関行列D(下の表)(1952—72年)

	TFR	GDP	HED	EMP	共通変動	total
TFR	10.6782	20.9165	9.9785	19.5795	38.8473	100.000
GDP	1.4088	53.3777	11.0128	5.4583	28.7425	100.000
HED	0.3139	2.9914	22.2588	25.8320	48.6040	100.000
EMP	1.3156	15.8268	8.0314	67.5478	7.3684	100.000
$a_1$	-0.5033	0.3738	0.4548	0.1918		
TFR	1.0000	-0.0372	0.0432	-0.0503		
GDP	-0.0372	1.0000	0.0321	-0.2819		
HED	0.0432	0.0321	1.0000	0.1324		
EMP	-0.0503	-0.2819	0.1324	1.0000		

(3) 後期のRVCおよび残差の相関行列G(下の表)(1975—90年)

	TFR	GDP	HED	EMP	共通変動	total
TFR	63.4098	6.5545	21.2153	8.8203	●	100.000
GDP	14.7050	61.3032	13.3814	10.6102	●	100.000
HED	17.0202	4.9663	59.1465	18.8669	●	100.000
EMP	18.5041	7.2225	5.2988	68.9744	●	100.000
TFR	1.0000	0.0358	-0.4883	-0.1690		
GDP	0.0358	1.0000	0.6116	0.7024		
HED	-0.4883	0.6116	1.0000	0.3610		
EMP	-0.1609	0.7024	0.3610	1.0000		

(4) 後期のRVC\*および残差の相関行列D(下の表)(1975—90年)

	TFR	GDP	HED	EMP	共通変動	total
TFR	72.4816	0.0553	15.1501	5.0825	7.2302	100.000
GDP	16.3729	0.5039	9.3080	5.9554	67.8596	100.000
HED	17.9121	0.0385	38.8873	10.0094	33.1524	100.000
EMP	17.5375	0.0505	3.1374	32.9546	46.3197	100.000
a; <sub>i</sub>	0.0260	0.8345	0.3841	0.3366		
TFR	1.0000	0.0660	-0.6419	-0.2682		
GDP	0.0660	1.0000	0.0125	0.0091		
HED	-0.6419	0.0125	1.0000	-0.1264		
EMP	-0.2682	0.0091	-0.1264	1.0000		

(出所) 筆者作成。

%はHED, 19.5795%はEMP, 残りの38.8473%は共通変動の割合となり, 合計すると100%になる。このことはTFRはGDPとEMPの影響のほかに4変数の間で共通した影響を受けていることを意味している。同じように, GDPに対する貢献度は第8表の(2)の第2行目に示され共通変動の28.7425%のほか, 自分自身のGDPが53.3777%とHEDの11.0128%がある。HEDとEMPも同じような方法により各変数からの貢献度の割合を知ることができる。第8表からわかるることは, TFRに対して前期ではRVC\*の貢献度が高いのはGDPとEMPであるのに対して, 後期は前期に貢献したGDPとEMPの

影響がなくなり、代わって自分自身とHEDが影響を持ち始めたことである。また、後期については逆にGDP, HED, EMPに対してTFRからの影響があることである。

パス解析と同じように前期および後期のそれぞれをいくつかに区分し、RVC\*の推移を検討してみる。計算結果は省略するが、RVC\*について他の変数を無視して出生率の関係のみをまとめると、前期の特徴は、TFRに貢献するのは共通変動以外にはGDPとEMPが相対的に大きいことである。この関係は年を経るにつれて変化していく、自分自身への影響が増すと同時に、GDPへの依存が減少して代わりにHEDの貢献度が増してくる。後期では共通変動の割合が前期に比べて減少しているが、自分自身への貢献度が増えてくる。HEDも含めそれ以外の影響はデータの区分の仕方によって極端に変化するので判定が難しい。

### おわりに

台湾地域の合計特殊出生率は平均減少率にすれば約4%の低下であり、しかもほぼ直線的に低下する傾向にある。この下降傾向をもう少し詳しく検討するため線形トレンドからの乖離を出生率の変動として見ると、1975年を境としてそれまでは加速度的に減少傾向にあったのがその減少に歯止めがかかり、減少の傾向にも変化が現れてきたことを示している。また、GDPの成長率をはじめとする台湾の経済成長循環には6年の中期循環と3年の短期循環があることが知られているが、スペクトル分析によれば合計特殊出生率、高等教育を受けた人数の割合および就業者数の割合についてもそれと似たような循環の存在が確かめられる。

パス解析の結果からわかるることは、合計特殊出生率に対する因果関係は前期ではGDPの成長率と就業者数の割合が有意であったのが、中期に入るとGDPの成長率の影響が減りはじめ、後期は就業者の人数の影響も減少して

逆に高等教育を受けた人の割合の影響が強まってくることである。また、相互の因果関係も前期から後期にかけて変数間の因果関係の複雑さが増していく。同じことは1因子モデルによるVARモデルの予測分散寄与率の結果からもいえる。すなわち、前期は共通変動の割合が高く後期になるにつれてその割合が減少してきて固有の相互依存関係の影響が強まってきていることがある。特に前期のGDPとEMPの影響から、後期の高等教育の影響へと移行する結果はパス解析のそれと一致する。

パス解析と予測誤差分散分解との間の整合性という意味において、まず一般的な完備線形同時方程式を考えてみる。<sup>(14)</sup>

$$\Phi_0 y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + u_t \quad \dots \quad (11)$$

この両辺に $\Phi_0^{-1}$ を乗ずれば、

$$y_t = \Phi_0^{-1} \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_0^{-1} \Phi_p y_{t-p} + \Phi_0^{-1} u_t$$

$$y_t = \Phi_1^* y_{t-1} + \cdots + \Phi_p^* y_{t-p} + u_t^*$$

となる、ここで、 $\Phi_i^* = \Phi_0^{-1} \Phi_i$ 、 $u_t^* = \Phi_0^{-1} u_t$ とする。 $\Phi_0$ と $u_t^*$ の分散共分散行列は必ずしも対角行列ではなくてもいい。これは(5)式と同じ形であり、VARモデルになる。(11)式において $p=0$ 、また、

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & p_{03} & p_{02} & p_{01} \\ & 1 & p_{32} & p_{31} \\ & & 1 & p_{21} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば、(4)式に、 $x_t = u_t$ を付け加えた式に一致する。このことから、パス解析のための構造方程式はVARモデルの特殊な形であることがわかる。前述したように、台湾地域の出生力の事例ではほぼ同じ結論に達していると見てよいが、モデルの選択ということを考えれば、AICによる最適なモデルは第8表に示されたようにVAR(P)の次数として $p=0$ ではないので、AICを基準とする限り、VARモデルの方がよいモデルとなる。しかしながら、この結論を出す前にデータの制約とモデルの推計方法の違いを見逃すわけにはいかない。特にデータについては、分析に使用したデータが年データということ

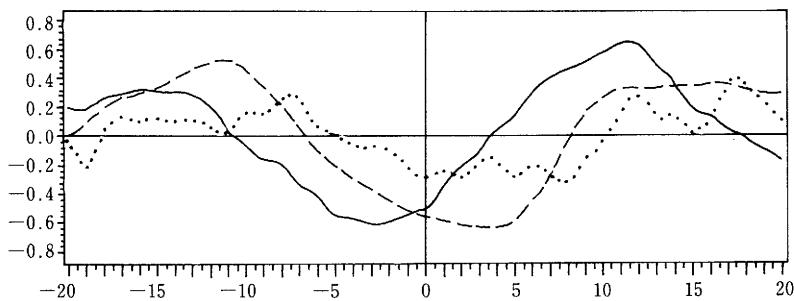
もあり、変数間の明確な先行性あるいは遅行性が現れなかつたことがあげられる。このことは第6図に示された相互相関関数を見ても、特定の年に強いスパイクが立つのではなく、ラグ0をも含めた幅広い範囲でお互いに影響しあっている状況が見られることからもわかる。

パス解析の場合には構造方程式の性質から、擾乱項に相当する残差は互いに独立であるが、出生率に対する擾乱項の固有変動はかなり大きな割合を占め、そのうえ高い系列相関が現れる。この系列相関を取り除くには、構造方程式にラグ構造を取り込む等で対処する必要がある。残差の問題点は予測誤差分散分解においても相互の残差の分散共分散行列が対角ではない瞬時の因果関係という状態で現れている。予測誤差分散分解ではこの瞬時の因果関係を、1因子モデルの直交化により残差を見かけ上の無相間に直すという操作によって対処したが、そのさいにでてくる共通変動の解釈が難しく、パス解析のようにはっきりとした形での変数間の因果関係が検出されていない。さらに、分析の期間を前期と後期に分けたことからサンプルサイズが小さくなつたこともこの2つの方法の違いを明確に識別できなかつた理由である。しかしながら、出生率に対する経済・社会要因の前期と後期の構造変化の違いは明らかにできたのではないかと思われる。

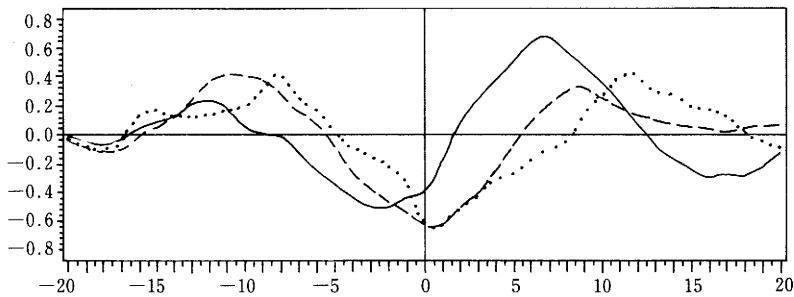
今後の問題点として残っているのは時系列分析にしてはデータ数が少ないと変動要因を規定するトレンド除去の方法である。トレンド除去については、今回試みた階差と線形トレンドからの乖離では減少の傾向が年々ゆるやかになってきている台湾の出生率への適用には無理があったかもしれない。そこで、ベイス型の時系列モデルでトレンドを含んだ系列をいくつかの成分に分解する手法も適応するなどいくつかの手法を取り入れて今回の結果との一致性を検討する必要がある。

第6図 相互相関関数

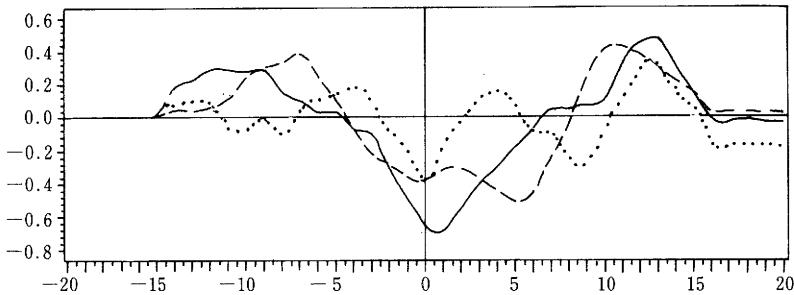
(a) 全期間(1952年—90年)



(b) 前期(1952年—72年)



(c) 後期(1975年—90年)



(注) ——TFRとHED, .....TFRとGDP, .....TFRとEMP。

(出所) 筆者作成。

## [注]

- (1) パス解析については、Kendall, M. G. ; C. A. O' Muircheartaigh, "Path Analysis and Model Building," *World Fertility Survey Technical Bulletins*, International Statistical Institute, 1977年3月, を参照すること。
- (2) TFRの時系列のデータを得るために, 1968 Taiwan Demographic Fact Book, Republic of China/1977 1980 1989 1990, Taiwan-Fukien Demographic Fact Book, Republic of China, を使用した。
- (3) 実質GDPの成長率(GDP), 高等教育を受けた人数の割合(HED), 就業率(EMP)は, Taiwan Statistical Data Book, 1991より得た。また, 台湾の出生力低下要因を連立方程式により解釈した例は, K. C. ポール; 孫得雄「台湾における出生力転換の要因とその影響」(日本大学人口研究所編, 趙利済, 黒田俊夫監訳『転換期のアジアの人口, 出生力低下の構造と展望』時潮社, 1986年)にある。ここでは人口領域, 雇用領域, 資源消費領域, 政策手段の4つの領域に属するいくつかの変数を用いている。
- (4) 台湾のマクロ経済の相互依存関係においては輸出が重要なファクターであるので輸出も付け加えたモデルも検討してみたが, 輸出の効果がうまく出てこないためモデルから取り除いた。
- (5) 前期と後期の境は, 「1975年はという年次は, この年が転換年にあたり…選ばれたものである」という内容と一致している(ポール; 孫, 前掲論文, 79ページ。)。ただし, 同文献ではオイルショックの影響を取り除いてはいない。なお, 時系列を2つの期間に分ける方法としては, Chow testやAICによる判定等があるが, 今回はこれらの方法は試みていない。
- (6) 実際の計算のさいにはデータは有限であるため, MAの次数を適当な範囲で打ち切ることにする。
- (7) ベクトル値自己回帰モデルは(5)式より次のように表すことができる。

$$y_t = \phi Y + u_t$$

ここで,  $Y' = [y_{t-1} \cdots y_{t-p}]$ ,  $\phi = [\Phi_1 \cdots \Phi_p]$  を表す。 $y_{t-s}$  と  $y_t'$  を乗じた後に平均をとれば,

$$E \{y_{t-s} y_t'\} = E \{[y_{t-s} y_{t-1}' \cdots y_{t-p}']\} \phi' + E \{y_{t-s} u_t'\}$$

と表され, ラグ s の分散共分散行列を

$$\Gamma_s = E \{y_{t-s} y_t'\} \quad s = -1, 0, 1, \dots$$

とすれば, (5)式は

$$\Gamma_s = [\Gamma_{s-1} \Gamma_{s-2} \cdots \Gamma_{s-p}] \phi' \quad s = -1, 0, 1, \dots$$

となる。さらに p 個の連立方程式を考えれば, よく知られたYule-Walkerの方程式になる。

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_{-1} & \cdots & \Gamma_{-p+1} \\ \Gamma_1 & \cdots & & \\ & \Gamma_{p-1} & \cdots & \Gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1' \\ \vdots \\ \Phi_p' \end{pmatrix}$$

$$r = R \phi'$$

分散共分散行列  $\Gamma_s$  の替わりに標本分散共分散行列  $\Gamma_0$  を代入すれば  $\Phi_i'$  は、

$$\phi' = R^{-1}r$$

として解くことができる。

- (8) VAR(p)モデルの残差  $u_t$  の分散共分散行列  $G$  は(注9)の記号を用いれば、次のように  $\Gamma_0$ ,  $\phi$  および  $r$  によって表すことができる。

$$\begin{aligned} G &= E\{u_t u_t'\} = E\{(y_t - \phi Y)(y_t - \phi Y)'\} \\ &= (I - \phi) \begin{pmatrix} yy' & yY \\ Yy' & YY' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -\phi \end{pmatrix} \\ &= (I - \phi) \begin{pmatrix} \Gamma_0 & r' \\ r & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -\phi \end{pmatrix} \\ &= \Gamma_0 - r' \phi' \\ &= \Gamma_0 - (\phi' r') \end{aligned}$$

この分散共分散行列  $G$  は必ずしも対角行列とは限らない。

- (9) 情報量基準 AIC は、

$$AIC = -2 \{ \text{モデルの最大対数尤度} \} + 2(\text{モデルの自由パラメーターの数})$$

と定義される。VAR(p)モデルの最大対数尤度は、 $-(n/2)(\log 2\pi |G| + m)$ 、自由パラメーターの数は  $pm^2 + m(m+1)/2$  となるので、これらの値を代入して AIC の値が得られる。

- (10) Cholesky 分解による直交化は、山本拓『経済の時系列分析』(創文社現代経済学選書2) 創文社、1985年、を参照すること。

- (11) 1因子モデルによる直交化は、西尾敦「多変量時系列の相互依存度の測定とその台湾経済のマクロ経済への応用」(坂井秀吉、小島末夫編『香港・台湾の経済変動——成長と循環の分析——』研究双書No. 374、アジア経済研究所、1988年)を参照のこと。

- (12) 山本前掲書、を参照すること。