補遺 第2章 識別問題の例

著者	植村 仁一
権利	Copyrights 日本貿易振興機構（ジェトロ）アジア経済研究所 / Institute of Developing Economies, Japan External Trade Organization (IDE-JETRO) http://www.ide.go.jp
シリーズタイトル	アジ研選書
シリーズ番号	47
雑誌名	マクロ計量モデルの基礎と実際 ： 東アジアを中心に
ページ	183-188
発行年	2018
出版者	日本貿易振興機構アジア経済研究所
URL	http://doi.org/10.20561/00050173

補遺　第2章　識別問題の例

本論では「誘導型の方程式群を与えられた場合，そこから構造型のパラメータを（式変形等によって）逆算することができるかどうかを考えるのが『識別問題』である」と述べた。

ここでは，最初に構造型方程式群を提示し，そこからいったん誘導型を導いたのちに，最初の構造型方程式のパラメータを求めなおすことができるかどうか，という手順で確認する。前提として，マクロ的にみた経済は消費と投資からなり（政府および海外部門は無いと仮定），

$$Y = C + I$$

家計（ミクロ）的にみた所得は消費と貯蓄に分配されるとする。

$$Y = C + S$$

これら２式から，

$$I = S$$

が導かれる。

１．モデル１．ちょうど識別

$$I = \beta_1 P + \beta_2 R$$

$$S = \gamma_1 P + \gamma_2 Y$$

I：投資，S：貯蓄，P：物価，R：金利，Y：所得（GDP）

初めの式は「投資関数」を表し，物価水準と金利で決まると仮定する。２番目の式は「貯蓄関数」であり，物価水準と所得から決まる。このモデルでは，I，SおよびPを内生変数（Pは別の式で内生化されていると仮定），R，Yを外生変数とする（補遺末尾（注）を参照）。さらに単純化のため定数項と誤差項を無視するが，議論の本質は変わらない。条件I＝Sから２式を

P について解くことができる。

$$\beta_1 P + \beta_2 R = \gamma_1 P + \gamma_2 Y$$
$$\Rightarrow \quad P = \frac{1}{\beta_1 - \gamma_1}(\gamma_2 Y - \beta_2 R)$$

この P をもとの式に代入すれば，

$$I = \beta_1 \frac{\gamma_2 Y - \beta_2 R}{\beta_1 - \gamma_1} + \beta_2 R$$

$$S = \gamma_1 \frac{\gamma_2 Y - \beta_2 R}{\beta_1 - \gamma_1} + \gamma_2 R$$

となり，これらを整理すると，

$$I = \frac{\beta_1 \gamma_2 Y - \beta_2 \gamma_1 R}{\beta_1 - \gamma_1}$$

$$S = \frac{\beta_1 \gamma_2 Y - \beta_2 \gamma_1 R}{\beta_1 - \gamma_1}$$

と同一となり，内生変数 P と I を外生変数 R と Y だけの式で書き表せば，

$$P = \frac{1}{\beta_1 - \gamma_1}(-\beta_2 R + \gamma_2 Y)$$

$$I = \frac{1}{\beta_1 - \gamma_1}(-\beta_2 \gamma_1 R + \beta_1 \gamma_2 Y)$$

となる。それぞれの式の係数を改めて別の文字 π と ∅ で表すと

$$P = \pi_1 R + \pi_2 Y$$
$$I = \emptyset_1 R + \emptyset_2 Y$$

と書くことができる。これがＩおよびＰについての誘導型表記であり，誘導型パラメータ群（π_1，π_2，$\emptyset_1$，$\emptyset_2$）はそれぞれ，

$$\pi_1 = \frac{-\beta_2}{\beta_1 - \gamma_1}, \quad \pi_2 = \frac{\gamma_2}{\beta_1 - \gamma_1}$$

$$\emptyset_1 = \frac{-\beta_2\gamma_1}{\beta_1 - \gamma_1}, \quad \emptyset_2 = \frac{\beta_1\gamma_2}{\beta_1 - \gamma_1}$$

である。
π_1と$\emptyset_1$，π_2と$\emptyset_2$の比をとれば，

$$\beta_1 = \frac{\emptyset_2}{\pi_2}, \quad \gamma_1 = \frac{\emptyset_1}{\pi_1}$$

となるから，

$$\beta_1 - \gamma_1 = \frac{\emptyset_2}{\pi_2} - \frac{\emptyset_1}{\pi_1} = \frac{\pi_1\emptyset_2 - \pi_2\emptyset_1}{\pi_1\pi\_2}$$

であって，さらにここから，

$$\beta_2 = -\pi_1(\beta_1 - \gamma_1) = -\pi_1\left(\frac{\pi_1\emptyset_2 - \pi_2\emptyset_1}{\pi_1\pi_2}\right) = \frac{\pi_2\emptyset_1 - \pi_1\emptyset_2}{\pi_2}$$

$$\gamma_2 = \pi_2(\beta_1 - \gamma_1) = \pi_2\left(\frac{\pi_1\emptyset_2 - \pi_2\emptyset_1}{\pi_1\pi_2}\right) = \frac{\pi_1\emptyset_2 - \pi_2\emptyset_1}{\pi_1}$$

と，誘導型パラメータから構造型パラメータが完全に逆算できることが示される。これをもって，この同時方程式群は「ちょうど識別」される，という。

２．モデル２．識別不能

上のモデルを若干変更して，投資関数の側に金利変数が導入されていない以下のモデルを考える（内生変数：I，S，P；外生変数：Y）。

$$\mathrm{I} = \beta_1 \mathrm{P}$$
$$\mathrm{S} = \gamma_1 \mathrm{P} + \gamma_2 \mathrm{Y}$$

上と同様の展開を進めると，

$$P = \frac{\gamma_2}{\beta_1 - \gamma_1}\mathrm{Y}$$

$$I = (S =)\frac{\beta_1\gamma_2}{\beta_1 - \gamma_1}\mathrm{Y}$$

が得られ，ここから，

$$\beta_1 = \frac{\emptyset_2}{\pi_2}$$

までは得られるが，他の構造型パラメータ γ_1および γ_2は求めることができない。

この場合，誘導型パラメータから構造型パラメータを逆算することが不可能であるので「識別不能」という。

３．モデル３．過剰識別

改めて上のモデルを若干変更して，貯蓄関数にその他の（外生）変数が導入されたモデルを考える（内生変数：I，S，P；外生変数：R，Y，Z）。

$$\mathrm{I} = \beta_1 \mathrm{P} + \beta_2 \mathrm{R}$$
$$\mathrm{S} = \gamma_1 \mathrm{P} + \gamma_2 \mathrm{Y} + \gamma_2 \mathrm{Z}$$

同様に展開を進めると，今度は

$$P = \frac{1}{\beta_1 - \gamma_1}(-\beta_1 \mathrm{R} + \gamma_2 \mathrm{Y} + \gamma_3 \mathrm{Z})$$

$$I = \frac{1}{\beta_1 - \gamma_1}(-\beta_2\gamma_1 \mathrm{R} + \beta_1\gamma_2 \mathrm{Y} + \beta_1\gamma_3 \mathrm{Z})$$

となり，誘導型パラメータ群を以下のようにあらわすことができる。

$$\pi_1 = \frac{-\beta_1}{\beta_1 - \gamma_1},\ \pi_2 = \frac{\gamma_2}{\beta_1 - \gamma_1},\ \pi_3 = \frac{\gamma_3}{\beta_1 - \gamma_1}$$

$$\emptyset_1 = \frac{-\beta_2\gamma_1}{\beta_1 - \gamma_1},\ \emptyset_2 = \frac{\beta_1\gamma_2}{\beta_1 - \gamma_1},\ \emptyset_3 = \frac{\beta_1\gamma_3}{\beta_1 - \gamma_1}$$

この時，β_1は

$$\beta_1 = \frac{\emptyset_2}{\pi_2}, \qquad \beta_1 = \frac{\emptyset_3}{\pi_3}$$

という２つのちがう方法で表すことができることがわかる。このような場合，モデルは「過剰識別」されるという。

４．識別の階数条件（order condition）

モデルを構成する各式が識別されるかどうかは，モデル全体および注目する式に含まれる内生・外生変数の数によって判定することができる。

モデル全体に含まれる内生変数の数をM，外生変数の数をKとする。また，注目する式に含まれる内生，外生変数の数をそれぞれm，kとするとき，次の関係が成立つ。

$m + k - 1 > K$　過少識別（識別不能）
$m + k - 1 = K$　ちょうど識別
$m + k - 1 < K$　過剰識別

ただし，これは識別の必要条件であって十分条件ではないことに注意されたい。

上記の３モデルについてこの条件を確かめておく。

モデル１（ちょうど識別のケース）（内生変数：I，S，P；外生変数：R，Y）

$M=3$，$K=2$	m	k	$m+k-1$	判　定	
$\mathrm{I}=\beta_1\mathrm{P}+\beta_2\mathrm{R}$	2	1	2	$=K$	ちょうど識別
$\mathrm{S}=\gamma_1\mathrm{P}+\gamma_2\mathrm{Y}$	2	1	2	$=K$	ちょうど識別

モデル２（過少識別のケース）（内生変数：I，S，P；外生変数：Y）

$M=3$，$K=1$	m	k	$m+k-1$	判　定	
$\mathrm{I}=\beta_1\mathrm{P}$	2	0	1	$=K$	ちょうど識別
$\mathrm{S}=\gamma_1\mathrm{P}+\gamma_2\mathrm{Y}$	2	1	2	$>K$	過小識別

モデル３（過剰識別のケース）（内生変数：I，S，P；外生変数：R，Y，Z）

$M=3$，$K=3$	m	k	$m+k-1$	判　定	
$\mathrm{I}=\beta_1\mathrm{P}+\beta_2\mathrm{R}$	2	1	2	$<K$	過剰識別
$\mathrm{S}=\gamma_1\mathrm{P}+\gamma_2\mathrm{Y}+\gamma_3\mathrm{Z}$	2	2	3	$=K$	ちょうど識別

となり，上の条件が成り立っていることが確認される。

（注）ここではＰを内生変数として議論しているが，Ｐが外生変数であれば，これらの式はそのまま誘導型であることになる。